

アリストテレス的論理とメレオロジー

——「ウカシェヴィチ最後の謎」を解く——

齋藤 暢人

0. はじめに

アリストテレス的論理の実質が「全体と部分の論理」であることは、かねてから一部の論者によって指摘されてきた¹。他方で、アリストテレス的論理の現代的研究の嚆矢はヤン・ウカシェヴィチによるものであるが、上記の事実は、その研究を進展させるうえで重要な手掛かりとなる。本稿では、アリストテレス的論理を、現代の全体部分論、すなわちメレオロジーMereologyの観点からとらえなおすことを試みる。その狙いは、アリストテレス的論理といわゆるスコラ的論理のあいだの連続性を確かめること、ウカシェヴィチが残したある問題を解決することである。また、結論においては、アリストテレス的論理の順序論 theory of order としての特徴に光が当てられ、その存在論についても新たな知見が得られるはずである。

1. メレオロジーとアリストテレス的論理

1. 1. メレオロジー

はじめに、以下の議論における基礎となる「古典的メレオロジーClassical Mereology」（以下CM）を紹介しておく。メレオロジーにはさまざまなヴァリエーションが知られているが、CMは十分な表現力をもった標準的なものである²。

古典的メレオロジーCM

公理

(ACM.1)	$x < x$	(反射性)
(ACM.2)	$x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$	(推移性)
(ACM.3)	$x < y \wedge y < x \rightarrow x = y$	(反対称性)
(ACM.4)	$x > y \rightarrow \exists z (z < x \wedge z > y)$	(強補足性)
(ACM.5)	$\exists x \varphi \rightarrow \exists x \forall y (x < y \leftrightarrow \exists z (\varphi \wedge y < z))$	(和の存在)

定義

¹ たとえば『アリストテレス全集1』所収の『分析論前書』の訳者（井上忠）による注をみよ（p.436 n.4, p.438 n.13）。

² 「CM」はSimons [1987]による。Casati & Varzi [1999]では「GEM」と呼ばれており、「CM」は異なる体系を指すので注意が必要である。

(DCM.1)	$x < y := x < y \wedge \neg y < x$	(真部分)
(DCM.2)	$x < > y := \exists z (z < x \wedge z < y)$	(重複)
(DCM.3)	$x > < y := \neg x < > y$	(互いに素)
(DCM.4)	$\sigma x \varphi := \iota x \forall y (x < > y \leftrightarrow \exists z (\varphi \wedge y < > z))$	
(DCM.5)	$x + y := \sigma z (z < x \vee z < y)$	
(DCM.6)	$x \times y := \sigma z (z < x \wedge z < y)$	
(DCM.7)	$\sim x := \sigma z z > < x$	
(DCM.8)	$x - y := \sigma z (z < x \wedge z > < y)$	
(DCM.9)	$\pi x \varphi := \sigma x \forall y (\varphi \rightarrow x < y)$	
(DCM.10)	$U := \sigma x x = x$	
(DCM.11)	$x > y := \neg x < y$	

注意すべきは、(DCM.11)において導入される「>」である。これは、部分「<」や重複「<>」((DCM.2))、互いに素「><」((DCM.3))と異なり、それほど一般的ではない（サイモンズやカサティ&ヴァルツィらは導入していない）。しかし、アリストテレス的論理と CM のあいだには、以下のような自然な対応がある。

アリストテレス的論理		メレオロジー
全称肯定命題（A 命題）	すべての x は y である	$x < y$
特称肯定命題（I 命題）	ある x は y である	$x < > y$
全称否定命題（E 命題）	すべての x は y でない	$x > < y$
特称否定命題（O 命題）	ある x は y でない	$x > y$

つまり、「>」は、アリストテレス的論理における特称否定命題に相当する CM の概念であり、これに注目する点は本稿の特徴と言えるであろう。

1. 2. アリストテレス的論理

メレオロジーに続き、本稿の考察対象であるアリストテレス的論理を導入しよう。アリストテレス的論理の現代的研究は、既述のように、ウカシェヴィチのそれである。彼が発見したアリストテレス的論理の公理系をまず紹介しよう。本稿ではこれを体系 $\mathbb{L}$ と呼ぶ。ただし、記号は対応するメレオロジー CM のそれに変更しておく。

ウカシェヴィチの体系 $\mathbb{L}^3$

定義

(DL.1) $x > < y := \neg x < > y$

(DL.2) $x > y := \neg x < y$

³ Łukasiewicz [1957], §§25, 27.

AA 主張公理

(AL.1) $x < x$

(AL.2) $x < > x$

(AL.3) $y < z \wedge x < y \rightarrow x < z$

(AL.4) $y < z \wedge y < > x \rightarrow x < > z$

RA 主張に関する推論規則

代入則 $\vdash \alpha$ かつ β が α の代入の結果ならば、 $\vdash \beta$

推論規則 MP $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ かつ $\vdash \alpha$ ならば、 $\vdash \beta$

AR 拒否公理

(AL.5) $z < y \wedge x < y \rightarrow x < > z$

(AL.6) $z > < y \wedge x > < y \rightarrow x < > z$

RR 拒否に関する推論規則

代入則 $\nvdash \beta$ かつ α が β の代入の結果ならば、 $\nvdash \alpha$

推論規則 MT $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ かつ $\nvdash \beta$ ならば、 $\nvdash \alpha$

(各種の代入規則は省略した。)

一見して明らかなように、AR、RR において、比較的知られていない拒否 **Rejection** の概念を採用しているのがこの体系の大きな特色である。ここで、記号「 $\vdash$ 」は通常の「証明可能」を表すが、記号「 $\nvdash$ 」は「証明不可能」を表す。前者は式の主張、後者はその拒否を表現する。

上記の公理・規則のうち、主張公理はいずれも CM の定理であり、主張に関する推論規則も CM において認められる。したがって、 $\mathcal{L}$ の定理はすべて CM の定理であり、それゆえ $\mathcal{L}$ が CM の部分系であることはただちにわかる。

$\mathcal{L}$ にさらに拒否公理、拒否に関する推論規則がおかれた目的は、この体系における決定問題を解くためである。つまり、これらの公理・規則を利用すると、一定の条件を満たす任意の式について、それが定理であるか否かを証明することができる。このメタ論理的考察こそ、ウカシェヴィチが誇る研究の精華である。以下で彼の考察の概要を紹介しよう。

ウカシェヴィチは、アリストテレス的論理を上のように公理化することにより、以下の一連の結果を得た。まず、彼に倣って次の語句を定義する。「単純表現」とは、 $x < y$ 、 $x < > y$ 、 $x > < y$ 、 $x > y$ のいずれかのことであるとする。「基本表現」とは、文 α が $x < y$ 、 $x < > y$ 、 $x > < y$ 、 $x > y$ のいずれかである文 $\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \dots)$ のことであるとする⁴。

ウカシェヴィチによれば、 $\mathcal{L}$ のもとで、次の(1.1)のかたちの三段論法の各式が定理であるか否かは決定可能である。すなわち、アリストテレスが考察した三段論法は決定可能である

⁴ *Ibid.*, p.103.

5。

$$(1.1) \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{は単純表現})$$

さらに、ウカシェヴィチはより一般的な結果をも得た。次の規則を認めることにより、拒否公理(AL.6)が非定理となる（ゆえに拒否公理として前提する必要はない）⁶。また、より一般の三段論法が定理であるか否かも決定可能となる。

$$\text{スウペツキの規則} \quad \vdash \alpha \rightarrow \gamma \text{かつ} \vdash \beta \rightarrow \gamma \text{ならば、} \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \\ (\text{ただし、}\alpha \text{と}\beta \text{は否定単純表現、}\gamma \text{は基本表現})$$

定理 (TA) 全ての三段論法の式は、基本表現のいずれかと同値である⁷。

定理 (ウカシェヴィチ) 全ての基本表現の定理・非定理は決定可能である⁸。

以上から、ウカシェヴィチが示したのは結局次のこととなる。すなわち（妥当な仮定の下では）公理(AL.5)が拒否されるならば、他の非定理も拒否される。

とくに、

$$(1.2) \quad x < y \rightarrow y < x$$

$$(1.3) \quad x < > y \rightarrow x < y$$

$$(1.4) \quad x < z \rightarrow (y < z \rightarrow x < > y)$$

は拒否される⁹。なお、(1.4)より、ウカシェヴィチは明示的に述べてはいないが、

$$(1.5) \quad x < > z \rightarrow (y < > z \rightarrow x < > y)$$

もまた拒否される。これらの式は順序論としてのアリストテレス的論理にとっては重要なものであり、後に詳しく検討する。

さて、こうした一連の輝かしい成果から、ウカシェヴィチの研究が全体として成功を収めたのは疑いを容れない。アリストテレス的論理の現代的研究という新分野を開拓した功績は今後も決して色褪せないであろう。

しかし、そうであるにもかかわらず、もはや考察すべきことがなくなったわけではない。ウカシェヴィチにとって新たな問題として浮かび上がったのは、なぜ、この特定の式(AL.5)

⁵ *Ibid.*, §§26-27.

⁶ *Ibid.*, §30.

⁷ *Ibid.*, §32.

⁸ *Ibid.*, §33.

⁹ *Ibid.*, pp.123-25.

が拒否公理となるのか、であった¹⁰。これは「ウカシェヴィチ最後の謎」とでもいうべきものであるが、彼は自ら提出したこの問いに遂に答え得なかったようである。

以下においてわれわれが目指すのは、未解決に終わったこの「ウカシェヴィチ最後の謎」の解明である。論点をまず大まかに示しておこう。

ウカシェヴィチの興味はアリストテレスの論理にあり、考察の範囲もまた限定されていた。こうした研究上の制約を踏襲するならば、問題の解決に役立つような材料を新たに見つけ出すのは確かに困難である。しかし、アリストテレス的論理が本質的にはメレオロジーであることに注意し、その自然な拡張を考慮するならば、拒否公理が他のいかなる式と関連し、また、体系にとってどのような意義をもつのかは直ちに明らかとなる。その拡張とは、アリストテレス的論理の墮落した形態として悪名高い、いわゆるスコラの論理への拡張である¹¹。メレオロジーは、アリストテレス的論理のみならず、その拡張としてのスコラの論理をも包括するような一般理論とみなすことができる。こうした観点からは、最後に唯一残った拒否公理(AL.5)と、それ以外の非定理とのあいだの密接な関係がすべて証明可能となる。具体的には、拒否公理(AL.5)は、以下で「特異式」と称するものに同値である。ここから導かれる帰結は、これらを認めることはメレオロジーが順序論ではなくなることに等しい、ということである。すなわち、メレオロジーは<のつくる半順序の理論とみなせるが、拒否公理を付け加えたメレオロジーにおいては、<の順序は保存されないのである。このかぎりにおいて、拒否公理はアリストテレス的論理を含むメレオロジーの基本性格に関わる致命的な式である、ということができる。

1. 3. アリストテレス的論理からスコラの論理へ

次に、アリストテレス的論理とスコラの論理、メレオロジーの相互関係についてさらに述べておこう。ウカシェヴィチに続くボヘンスキやトーマスは次のような結果を残している。まず、体系 $\mathcal{M}$ を改良した等価な体系をボヘンスキが与え、「CS」と称している¹²。しかし、これよりも重要な改良がトーマスによってなされた。それは、名辞否定に当たる概念 n の導入である。この体系は「CS(n)」と呼ばれているが、ここでは「TH」と呼ぶこととする¹³。 n は CM における補元を採る操作 $\sim$ にあたる。他の概念もこれまでどおり CM の概念に置き換えると、TH は次のようになる。

トーマスの体系 TH

公理

(ATH.1) $x < x$

(ATH.2) $x < \sim x$

(ATH.3) $y > \sim z \wedge x < \sim y \rightarrow x > z$

¹⁰ *Ibid.*, p.76.

¹¹ スコラの論理に関しては Prior [1962], part II, chap. II, §1, 2 をみよ。

¹² Bocheński [1948].

¹³ Thomas [1949].

定義

$$(DTH.1) \sim\sim x := x$$

$$(DTH.2) x > < y := x < \sim y$$

$$(DTH.3) x < > y := \neg x < \sim y$$

$$(DTH.4) x > y := \neg x < \sim y$$

アリストテレス的論理に名辞否定を付け加えることはスコラの論理においてなされた。したがって TH はむしろスコラの論理の公理系である。また、 $\mathbb{L}$ とその拡張 TH の関係は、より弱いメレオロジーと補元をもつメレオロジーの関係に相当する。

ここでアリストテレス的論理、スコラの論理、メレオロジーの関係を整理しておこう。 $\mathbb{L}$ の定理に相当する以下は CM の定理である。

$$(1.6) \quad x < y \leftrightarrow \neg x > y$$

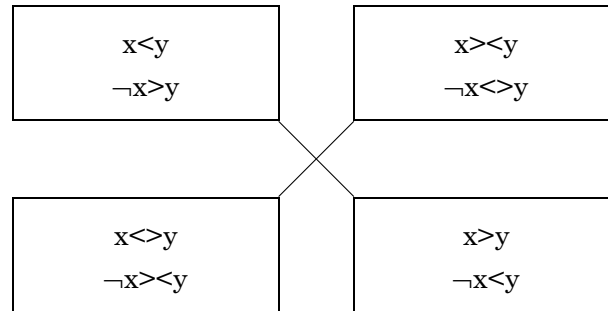
$$(1.7) \quad x < > y \leftrightarrow \neg x > < y$$

$$(1.8) \quad x < y \rightarrow x < > y$$

$$(1.9) \quad x > < y \rightarrow x > y$$

これらはいわゆる矛盾対当、大小対当にあたる。証明は容易につき省略する。なお、この結果をまとめると、いわゆる対当表ができる。

図 1.1 対当表



TH では、さらに次の式が成り立ち、これらもすべて CM の定理である。ただしこの場合、補元が必要となり、それゆえ、名辞否定をもたない狭義のアリストテレス的論理においては、その対応物は成り立たないであろう。つまり、これらはスコラの論理において見出された新しい論理構造のメレオロジー的対応物なのである。

$$(1.10) \quad x < \sim y \leftrightarrow x > < y$$

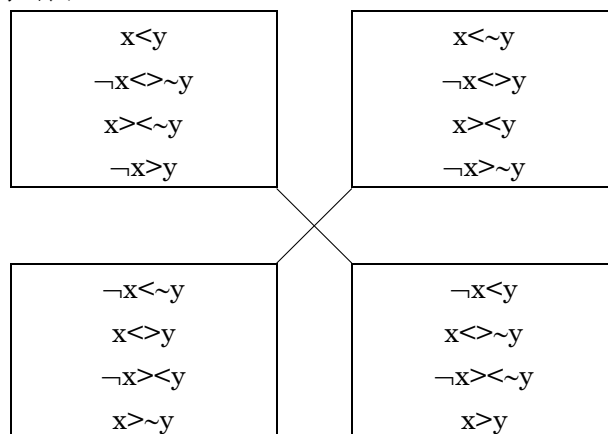
$$(1.11) \quad x < > \sim y \leftrightarrow x > y$$

$$(1.12) \quad x > < \sim y \leftrightarrow x < y$$

$$(1.13) \quad x > \sim y \leftrightarrow x < > y$$

証明はやはり省略する。これらの定理を利用すると、対当表は次のように拡張される。以上の(1.6)から(1.13)により、アリストテレス・スコラの論理が、一般理論としてのメレオロジーによって精密に分析されることは明らかであろう。

図 1.2 拡張された対当表



節を閉じるにあたり、ウカシェヴィチの研究についてコメントしておこう。彼の研究の欠陥は、私見では、最終的には両立しえない二つの目標が同居している、という点である。彼は一方で、スコラの論理という墮落した形態に陥る以前のアリストテレス的論理を発見する、という歴史的研究を目指しているが、他方で、現代論理の成果を利用してアリストテレス的論理を再編・発展させる、という理論的研究をも志向している。こうした二兎を追うかのごとき方針のゆえに、彼の研究には次の問題がある。イ．スコラの論理との断絶を強調するあまり、アリストテレス的論理の拡張性をとらえそこなっている。ロ．アリストテレス的論理の理論的再構成のために、アリストテレス的論理の歴史的再建には、最終的には失敗している。

とくにロに関しては、同一律 $x < x$, $x < \neg x$ を公理として採用したことが文献的証拠を欠く、という批判がある¹⁴。この批判には正当な面もあるが、他方で、アリストテレス的論理の決定問題解決にはこれらの式が不可欠であるという事実を考えると、偏頗にも思われる。こうした矛盾は、誰よりもウカシェヴィチ自身がそれによって苦しんだであろう、歴史的興味と理論的関心の衝突の一例である。

アリストテレス的論理の歴史的再建という課題は、明確な目標の設定が困難であり、不毛な文献学に陥る虞がある。一層重要なのは、アリストテレス的論理の理論的研究のほうであろう。だが、そうであるとするならば、研究がアリストテレス的論理の歴史的形態に縛られる必要はない。ウカシェヴィチの結果を、スコラの論理の方向へと展開させたボヘンスキ、トーマスらの研究は、それなりの合理性をもっていたとみるべきである（もっとも、彼らの研究もまた歴史的事情に拘泥しすぎているように思われる）。

¹⁴ Kneale & Kneale [1962], pp.80-81, 杉原[1964], pp.20-1. なお、Prior [1962]によれば、ライプニッツの論理には同一律 $x < x$ がみられる。Ibid., pp.120-21.

2. 対当のメレオロジー的分析

2. 1. 基本的関係と対当

アリストテレス的論理の基本性格を知るには、対当の関係を知るべきである。これをメレオロジーによって分析してみよう。メレオロジーに登場する $<$ 、 $<>$ 、 $><$ 、 $>$ という四つの基本的関係に関連して成立する幾つかの定理に注意しよう。以下は **CM** の定理である¹⁵。

$$(2.1) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y) \quad (\text{SCT } 13)$$

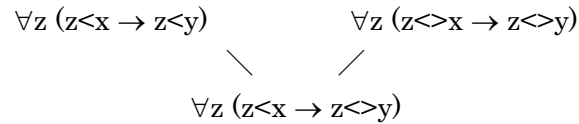
$$(2.2) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < > x \rightarrow z < > y) \quad (\text{SCT } 15)$$

また、次が成り立つ。

$$(2.3) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y) \quad (\text{cf. (ACM.2), (ACM.4)})$$

これらの右辺のあいだには、次のような含意関係がある（図 2.1 は、上の式が下の式を含意することを示す、一種のハッセ図である）。

図 2.1



しかし、これらはすべて $x < y$ と同値であるから、**CM** においては、これらはすべて同値である。

ところが、これらとよく似た次の式は、これらと同値ではない。

$$(2.4) \quad \forall z (z < > x \rightarrow z < y)$$

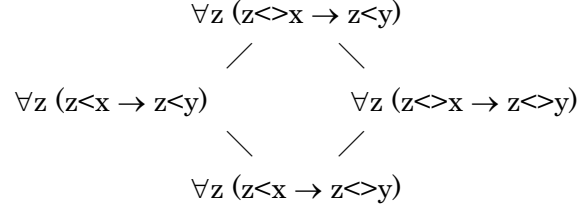
これについては次が成り立つ。

$$(2.5) \quad \forall z (z < > x \rightarrow z < y) \rightarrow x < y$$

しかし、この逆は成り立たない。つまり、式(2.4)は、先の図 2.1 の三つの式 ((2.1)、(2.2)、(2.3) 式の右辺) よりも論理的に強い。このことも勘案すると、さらに次のような図が得られる。

¹⁵ Simons [1987], pp.38-40. 「SCT」は **CM** の定理であることを意味する同書の略号である。

図 2.2



要するに、これらのうち、最大元のみが $x < y$ と同値ではないが、他の式は同値である。この結果をまとめると次のようになる。

$$(2.6) \quad \forall z (z <> x \rightarrow z < y) \rightarrow x < y$$

$$(2.7) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z <> x \rightarrow z <> y)$$

$$(2.8) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z <> y)$$

$$(2.9) \quad x < y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y)$$

同様の作業は、 $<$ 以外の関係、 $<>$ 、 $>$ 、 $><$ についてもできる。次の式は CM の定理である。

$$(2.10) \quad x <> y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z < y) \quad (\text{cf. Simons [1987]における(SD2)})$$

$$(2.11) \quad x <> y \leftrightarrow \exists z (z <> x \wedge z < y)$$

$$(2.12) \quad x <> y \rightarrow \exists z (z <> x \wedge z <> y)$$

$$(2.13) \quad x <> y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z <> y)$$

$$(2.14) \quad x > y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z > y)$$

$$(2.15) \quad x > y \leftrightarrow \exists z (z < x \wedge z > y)$$

$$(2.16) \quad x > y \rightarrow \exists z (z <> x \wedge z > y)$$

$$(2.17) \quad x > y \leftrightarrow \exists z (z <> x \wedge z > y)$$

$$(2.18) \quad \forall z (z <> x \rightarrow z > y) \rightarrow x > y$$

$$(2.19) \quad x > y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z > y)$$

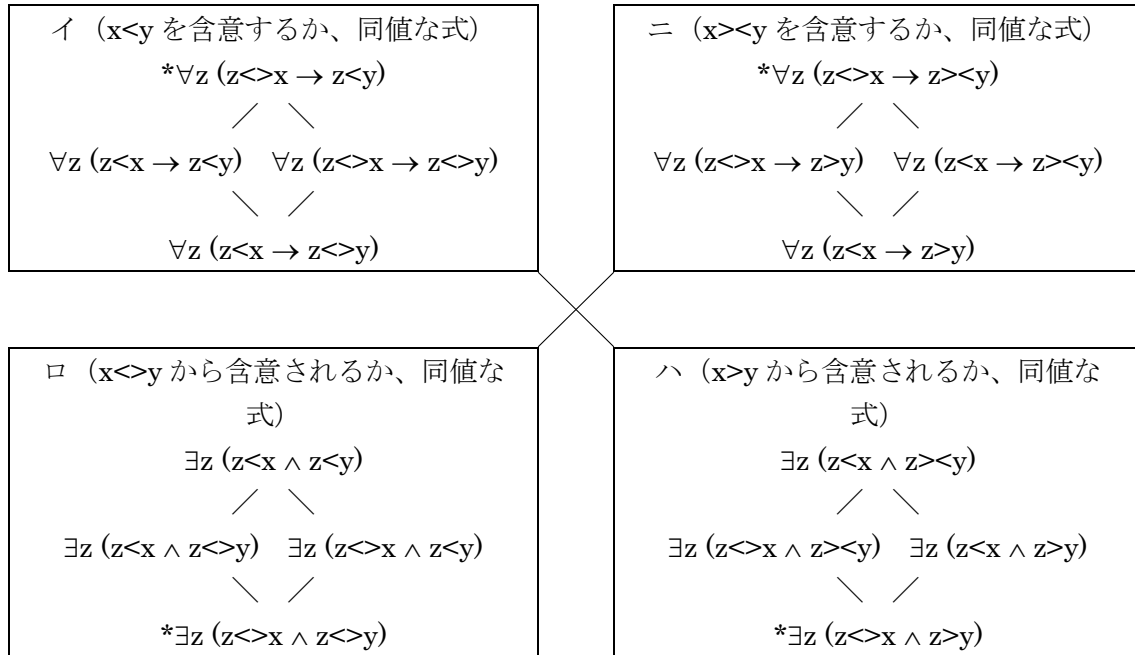
$$(2.20) \quad x > y \leftrightarrow \forall z (z < x \rightarrow z > y)$$

$$(2.21) \quad x > y \leftrightarrow \forall z (z <> x \rightarrow z > y)$$

(これらの式が CM の定理であることは容易にわかるが、これを組織的に検討した文献は未見である。)

ここから先のような図を作成し、さらに対当表にあてはめると、次のようになる。

図 2.3



ただし念のため繰り返すと、「*」を付した式は、同じ枠のなかの他の式と同値ではない。四つの欄のうち、欄イ、ニでは、最大元のみ他の式より強い。欄ロ、ハでは、最小元のみ他の式より弱い。

2. 2. 基本的関係についての補足

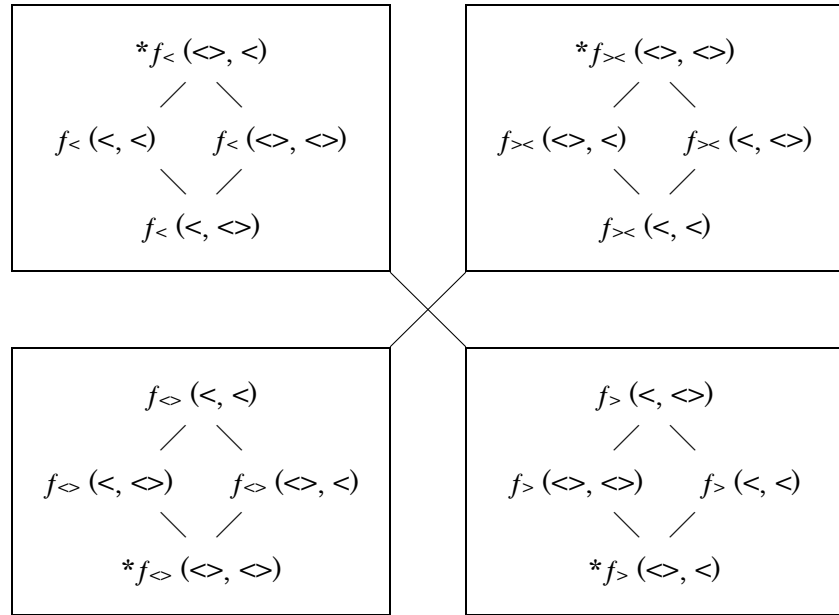
これまでのところから明らかになったのは、メレオロジーに登場する<、<>、><、>という四つの基本的関係を表す式はいろいろなヴァリエントをもっており、また、そうしたヴァリエントのあいだには一定の相互関係が成り立っている、ということであった。この相互関係について補足しておこう。上の図 2.3 の各欄の式は、下の表のように共通の論理構造をもつ。それらを下の表の右欄のようにあらわすこととしよう。

各欄の式	共通の論理構造	
欄イの $x < y$ のヴァリエント	$\forall z (\varphi zx \rightarrow \psi zy)$	$f_{<}(\varphi, \psi)$
欄ロの $x <> y$ のヴァリエント	$\exists z (\varphi zx \wedge \psi zy)$	$f_{<>}(\varphi, \psi)$
欄ハの $x >< y$ のヴァリエント	$\forall z (\varphi zx \rightarrow \neg \psi zy)$	$f_{><}(\varphi, \psi)$
欄ニの $x > y$ のヴァリエント	$\exists z (\varphi zx \wedge \neg \psi zy)$	$f_{>}(\varphi, \psi)$

ここで、「 φ 」「 ψ 」は、<か<>のいずれかが入る述語変項である。

すると、図 2.3 から、次のような図 2.4 が得られる。

図 2.4



<と>の組み合わせのパターンは全部で四通りであるが、四つの欄を反時計回りにみてゆくと、各欄のなかでそれらのパターンが時計回りに巡回している（一周すると元に戻る）。代数学的な見地から検討しても面白いであろうが、本稿では深入りを避ける。

3. 諸定理の証明

さて、これまでのメレオロジーを利用した分析により、アリストテレス・スコラの論理における四つの基本的関係は、論理構造を同じくする書き換えが可能であるが、他方で、同様の論理構造をもちながらも等価ではない式がそれぞれ存在する、ということが明らかとなった。こうした式の存在が意味することは、いったい何であろうか。

改めて確認しておくと、CMにおいて以下の式は定理ではない。

- (3.1) $x < y \rightarrow \forall z (z < x \rightarrow z < y)$
- (3.2) $\exists z (z < x \wedge z < y) \rightarrow x < y$
- (3.3) $x > y \rightarrow \forall z (z < x \rightarrow z > y)$
- (3.4) $\exists z (z < x \wedge z > y) \rightarrow x > y$

これら(3.1)-(3.4)の式を「特異式」と呼ぶことにする。すでに触れたように、実は、これらはウカシェヴィチの拒否公理と同値である。さらに、これらばかりでなく、論理的に興味深い幾つかの式もまた同値である。つまり、拒否公理は一群の重要な同値式の一部であることが判明するわけであるが、このことをいくつかの段階に分けて示してゆくこととしよう。なお、以下の証明は論理的には必要のない段階も含むが、理解を容易にするために、敢えてそうした段階を整理・省略しないこととする。

補題 1 : 特異式は次の(3.5) (大小対当の逆) と同値である。

$$(3.5) \quad x \leftrightarrow y \rightarrow x < y$$

証明 : (3.1)と(3.4)、(3.2)と(3.3)の同値性は明らか。そこで、(3.1)と(3.5)の同値性と(3.2)と(3.5)の同値性を示す。

((3.1)と(3.5)の同値性) ((3.1)から(3.5)) $x < y \rightarrow \forall z (z \leftrightarrow x \rightarrow z < y)$ とする ((3.1))。ここから代入により $y < y \rightarrow \forall z (z \leftrightarrow y \rightarrow z < y)$ 。他方で $y < y$ (公理)。ゆえに $\forall z (z \leftrightarrow y \rightarrow z < y)$ 。ゆえに $x \leftrightarrow y \rightarrow x < y$ 。((3.5)から(3.1)) $x < y$ とおく (①)。さらに $a \leftrightarrow x$ とおく (②)。②と(3.5)より $a < x$ 。これと①より $a < y$ (<の推移性)。ゆえに $a \leftrightarrow x \rightarrow a < y$ (②より)。よって $\forall z (z \leftrightarrow x \rightarrow z < y)$ 。ゆえに $x < y \rightarrow \forall z (z \leftrightarrow x \rightarrow z < y)$ 。

((3.2)と(3.5)の同値性) ((3.2)から(3.5)) $x \leftrightarrow y$ とする (①)。 $a < x$ とおく (②)。②より $x \leftrightarrow a$ (メレオロジー)。①、②より $x \leftrightarrow a \wedge x \leftrightarrow y$ 。ゆえに $\exists z (z \leftrightarrow a \wedge z \leftrightarrow y)$ 。ゆえに $a < y$ ((3.2))。ゆえに $a < x \rightarrow a < y$ (②より)。よって $\forall z (z < x \rightarrow z < y)$ 。ゆえに $x < y$ (メレオロジー)。よって $x \leftrightarrow y \rightarrow x < y$ (①より)。((3.5)から(3.2)) $\exists z (z \leftrightarrow x \wedge z \leftrightarrow y)$ とする。 $a \leftrightarrow x \wedge a \leftrightarrow y$ とおく。すると(3.5)より直ちに $a < x \wedge a < y$ 。ゆえに $\exists z (z < x \wedge z < y)$ 。つまり $x \leftrightarrow y$ 。ゆえに $\exists z (z \leftrightarrow x \wedge z \leftrightarrow y) \rightarrow x \leftrightarrow y$ 。 ■

なお、言うまでもないことであるが、この補題により、特異式がお互いに同値であることも示された。

次に、もうひとつの補題を示す。

補題 2 : 特異式は次の(3.6) (<の対称性) と同値である。

$$(3.6) \quad x < y \rightarrow y < x$$

証明 : これは、(3.5)と(3.6)の同値性を示すことによって示す。

((3.5)から(3.6)) $x < y$ とおく。すると $y \leftrightarrow x$ (メレオロジー)。ところが $y \leftrightarrow x \rightarrow y < x$ ((3.5))。ゆえに $y < x$ 。よって $x < y \rightarrow y < x$ 。

((3.6)から(3.5)) $x \leftrightarrow y$ とおく。定義より $\exists z (z < x \wedge z < y)$ なので、 $a < x \wedge a < y$ とおく。 $a < x$ より $x \leftrightarrow a$ ((3.6))。 $a < y$ より $x < y$ (<の推移性)。ゆえに $x < y$ 。よって $x \leftrightarrow y \rightarrow x < y$ 。

ゆえに、(3.6)は(3.5)と同値である。それゆえ、補題 1 より、特異式は(3.6)とも同値である。 ■

さて、ここで、ウカシェヴィチの拒否公理とは何であったかを再確認しておこう。それは次のような式であった。

$$(3.7) \quad z < y \wedge x < y \rightarrow x \leftrightarrow z \quad ((\text{AL.5}) \text{として前出})$$

$$(3.8) \quad z > y \wedge x > y \rightarrow x \leftrightarrow z \quad ((\text{AL.6}) \text{として前出})$$

これらについて、次のことが成り立つ。

補題 3 : ウカシェヴィチの拒否公理(3.7)と(3.8)は同値である。

証明 : 「(3.7)から(3.8)」は、メレオロジーの定理 $x < \sim y \leftrightarrow x > < y$ ((1.5)) により直ちに明らかである。逆に、「(3.8)から(3.7)」は、先に第一節で紹介したウカシェヴィチの考察によりすでに明らかである。なんとなれば、ウカシェヴィチによれば、(3.7)が拒否されるならば(3.8)は拒否される。ゆえに、(3.8)が主張されるならば(3.7)が主張される。すなわち「(3.8)から(3.7)」である。ただし、これは、メレオロジーの定理 $x > < \sim y \leftrightarrow x < y$ ((1.7)) により直ちに明らかである。■

なお、補題 1、2 と異なり、この補題 3 の証明で利用されたメレオロジーの定理はいずれも補元を含む。したがって、これに相当する名辞否定をもたない狭義のアリストテレス的論理においては、この補題の証明は困難であろう。この事実は、スコラの論理への拡張の必然性の根拠である。

さらに次が言える。

補題 4 : 拒否公理(3.7)と(3.8)は<の対称性(3.6)と同値である。

証明 : 補題 3 より(3.7)と(3.8)は同値であるから、(3.8)と(3.6)の同値性を示せば十分である。

((3.8)から(3.6)) $z > < y \wedge x > < y \rightarrow x < > z$ における代入 ($\sim z/z$, $\sim x/x$) により $\sim z > < y \wedge \sim x > < y \rightarrow \sim x < > \sim z$ 。ここから $y < z \wedge y < x \rightarrow \sim x < > \sim z$ ((1.7))。これは $\exists y (y < z \wedge y < x) \rightarrow \sim x < > \sim z$ と同値。よって $x < > z \rightarrow \sim x < > \sim z$ (定義)。ここで代入 ($\sim x/x$) により $\sim x < > z \rightarrow \sim \sim x < > \sim z$ 。ゆえに $z < > \sim x \rightarrow x < > \sim z$ (メレオロジー)。すると $z > x \rightarrow x > z$ ((1.6))。それゆえ $x < z \rightarrow z < x$ (対偶、メレオロジー)。したがって $x < y \rightarrow y < x$ (変項の書き換え)。

((3.6)から(3.8)) $z > < y \wedge x > < y$ (仮定)。 $z < \sim y \wedge x < \sim y$ ((1.7))。 (3.6)よりただちに $\sim y < z \wedge \sim y < x$ 。ゆえに $\exists v (v < x \wedge v < z)$ 。よって $x < > z$ (定義)。ゆえに $z < y \wedge x < y \rightarrow x < > z$ 。■

ここでも、補元を含むメレオロジーの定理は自由に用いた。

以上で準備は終わりである。いよいよ先に述べたことを証明できるが、これを定理として述べておこう。

定理 1 : (3.1)から(3.6) (すなわち特異式、大小対当の逆、<の対称性) はすべて、ウカシェヴィチの拒否公理と同値である。

証明 : 補題 1、2、3、4 より、特異式、大小対当の逆、<の対称性、拒否公理はすべて同値となる。ゆえに、定理 1 は成り立つ。■

この結果は、図式的には、次のようにまとめることができよう。

特異式＝大小対当の逆＝<の対称性＝拒否公理

ここから明らかになるのは次のようなことである。

まず、ウカシェヴィチが当初挙げた拒否公理は二つであったが、適切に拡張されたアリストテレスの論理、すなわちスコラの論理においては、三段論法の拒否公理がひとつでよいことは直ちにわかる。もちろん、ウカシェヴィチは最終的に公理を(AE.5)にまで節約することに成功していたので、この結果自体は驚くにあたらない。しかし、重要なのは、拒否公理が他の幾つかの式と同値である、ということである。言い換えると、拒否公理は、こうした一群の、特異式と同値な任意の式でよい。それゆえ、<の対称性(3.6)は拒否公理となりうるし、特異式に含まれている<>の推移性(3.2)も拒否公理となりうる。大小対当の逆(3.5)もまた、そうした拒否公理の候補である。

さらに、これらのなかに(3.5)、(3.6)のような式が含まれていることから直ちにわかるように、これらのいずれかを認めるときには、<が順序であるばかりではなく、同値関係でもあることになる。したがって、そうしたときには、もはや CM において、<の順序は保存されない。それゆえ、ここで改めて拒否公理の役割を考えると、それは、こうした帰結を阻むことにより、<の順序を保存している、ということができよう。

以上の結果を最後にまとめておこう。

補題 5 : (CM において) 次の主張は同値である。

1. <と<>は可換である。
2. <は同値関係である。
3. <>は同値関係である。

証明 :

- 1 から 2 : 1 とする。このとき(3.5)がなりたつが、これは(3.6)と同値である。ゆえにこのとき、<は、反射性、推移性に加えてさらに対称性をみだし、同値関係となる。ゆえに 2 が成り立つ。
- 2 から 3 : 2 とする。このとき(3.6)が成り立つが、これは(3.2)と同値である。ゆえにこのとき、<>は反射性、対称性に加えてさらに推移性をみだし、同値関係となる。ゆえに 3 が成り立つ。
- 3 から 1 : 3 とする。このとき(3.2)が成り立つが、これは(3.5)と同値である。ゆえにこのとき、<と<>のあいだの大小対当に加え、その逆も成り立ち、両者は可換となる。ゆえに 1 が成り立つ。 ■

定理 2 : (CM において) 次の主張は同値である。

1. 拒否公理が成り立つ。
2. 特異式が成り立つ。
3. $<$ が順序を保存しない。

証明：1と2は明らかに同値（定理1）。2は((3.2)より)「 $<$ が同値関係」と同値。補題5より、これは「 $<$ が同値関係」と同値。このとき $<$ は明らかに順序を保存しないので、3が成り立つ。3ならば1は明らかに成り立つ（定理1）。■

さて、われわれはついに「ウカシェヴィチの最後の謎」への答えに到達したように思われる。結論からいえば、拒否公理は、メレオロジーにおいて、それゆえアリストテレス的論理においても、順序を保存するために必要である。ただし、考察の結果明らかとなったように、ウカシェヴィチの立てた拒否公理(AL.5)に特別な意味があるわけではない。それは、同様の機能を果たす多くの式のなかのひとつにすぎない。ただし、そうした地平を見渡すためには、アリストテレス的論理は、少なくともスコラの論理を含むまでには拡張されなければならない。純粋に論理的とはいえない、文献学的理由によってこの可能性を排除したことは、偉大なる論理学者ウカシェヴィチにとって千慮の一失とでもいうべき痛恨事ではなかったかと想像される。

4. 哲学的考察

これまではアリストテレス的論理の純粋に論理的な側面に議論を限定してきたが、本来、アリストテレス的論理はアリストテレスの存在論と深い関わりをもっており、実際、本稿において追究してきた論理的問題も、存在論的問題と無縁ではない。最後にそれに関して述べておく。

拒否公理が存在するアリストテレス的論理は、いわば、本質的に順序論である、ということになるであろう。それがそのまま存在論とみなされたとき、アリストテレス的存在論は、形相の順序（秩序）を記述する存在論となる。では、ここでひとつの可能性として、次のような問いを考えてみよう。アリストテレス的論理に加えて、拒否公理に当たるものを許容するような存在論は、どのようなものなのであろうか。つまり、アリストテレス的存在論から順序が失われたとき、それはどのような存在論になるのであろうか。結論から言うと、それは、以下に示されるように、存在論としての原子論となる。

存在論としての原子論は、メレオロジーによって定式化することができる。部分関係を利用して定式化された原子は、次のようなものである。

$$(4.1) \quad x \text{ は原子である} := \forall y (y < x \rightarrow x = y)$$

タルスキらの研究によれば、 x が原子であることを述べる上記の右辺には、いろいろなヴァリエーションがある。それは次のようなものである¹⁶。

¹⁶ Simons [1987], p.47ff.

$$(4.2) \quad \forall y \forall z (x=y+z \rightarrow x=y \vee x=z)$$

$$(4.3) \quad \forall y \forall z (x<y+z \rightarrow x<y \vee x<z)$$

$$(4.4) \quad \forall y (x<y \vee x<\sim y)$$

これらはいずれも同値であることが容易に確かめられるが、注意したいのは、これらがすべて、次の(4.5)（すなわち大小対当の逆(3.5)）と同値である、ということである。これらのうち、(4.4)を代表にとつて、(4.5)との同値性を確かめておこう。

$$(4.5) \quad \forall y (x<>y \rightarrow x<y)$$

証明： $x<y \vee x<\sim y$ とする。これは $x<\sim y \vee x<y$ と同値（論理）。これは $x><y \vee x<y$ と同値（メレオロジー）。定義により $\neg x<>y \vee x<y$ 。ゆえに $x<>y \rightarrow x<y$ 。■

実際、任意の対象に関して(4.5)が成り立つことを付け加えたメレオロジーは、原子論的である。前節の結果から明らかなように、その体系では<と<>が区別できなくなり、また、>と><の区別もまた失われ、さらに<と<>は同値関係に、><と>はその否定になる。

この結果を三段論法にあてはめて考えると、この体系では、定理が著しく増えることが直ちに分かる。同値関係の例として代入をとりあげ、その否定とを組み合わせると結論が得られる場合が定理となる、というように解釈してみよう。<と<>を=によって、><と>を≠によって表し、大前提の関係 ζ 、小前提の関係 η 、結論の関係 θ を $[\zeta, \eta, \theta]$ と表すことにすると、可能な組み合わせのパターンは次の八通りとなる。

$$(1) [=, =, =] \quad (2) [=, =, \neq] \quad (3) [=, \neq, =] \quad (4) [=, \neq, \neq]$$

$$(5) [\neq, =, =] \quad (6) [\neq, =, \neq] \quad (7) [\neq, \neq, =] \quad (8) [\neq, \neq, \neq]$$

これらのそれぞれがいわゆる四つの格に対応した式をもつが、もとの記号に直してみると、実際には、これらのそれぞれは、**well-formed**な256通りの式のうち、その32通りを表していることに注意しよう。これらのなかで明らかに成り立つのは、(1)、(4)、(6)の場合のみである。ゆえに、この場合、三段論法の定理は $32 \times 3 = 96$ 存在する（アリストテレス的論理における定理は、周知のように、24ある）。

このように解釈されたメレオロジーにおいては、すべての対象のあいだに成り立つ関係は、それらが「等しいか否か」を述べるものでしかなく、部分関係は実質的に存在しない。こうした論理の上に成り立つ存在論は明らかにアリストテレス的ではないであろう（アリストテレスのデモクリトスの原子論批判を想起されたい）¹⁷。逆に、アリストテレス的論理

¹⁷ 通常、原子論は次のように定式化される（Simons [1987], pp.41-45, Casati & Varzi [1999], pp.47-49 参照）。

$$\forall x \exists y (y \text{ は原子である} \wedge y < x)$$

が排除する特異式は、いわば原子論の存在論的公理である。こうしてみると、アリストテレス的論理は、原子論を拒否するアリストテレス的存在論の論理的根拠になっているのである。

文献

[非邦語]

- Bocheński, I. M., 1948, 'On the Categorical Syllogism' in Menne [1962]
Casati, R., and A. C. Varzi, 1999, *Parts and Places: The Structures of Spatial Representation*, Cambridge, Mass.: MIT Press
Kneale, W., and M. Kneale, 1962, *The Development of Logic*, Oxford: Clarendon
Łukasiewicz, J., 1957, *Aristotle's Syllogistic: From the Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford: Clarendon
Menne, A. (ed.), 1962, *Logico-Philosophical Studies*, Dordrecht: Reidel
Prior, A. N., 1962, *Formal Logic* 2nd edn., Oxford: Clarendon
Simons, P. M., 1987, *Parts: A Study in Ontology*, Oxford: Clarendon
Thomas, I., 1949, 'CS(n): An Extension of CS' rep. in Menne [1962]

[邦語]

- アリストテレス (山本ほか訳) 『アリストテレス全集 1』 岩波書店、1971
杉原丈夫『様相論理学研究』 山喜房、1964

(早稲田大学)

Aristotelian Logic and Mereology:
Łukasiewicz's Last Problem Solved
SAITO Nobuto

おそらくデモクリトスの原子論もこうしたものであろう。これには、原子からなるもの(複合体)に関しては存在の余地がある。それに対して、本節で考察した原子論はそうしたものを許容しないであろう。それゆえこれは正確には「デモクリトス的」とは呼べない。しかしそうだとすると、(複合体否認という点で)本節での原子論は通常の原子論よりも強い主張であり、それゆえデモクリトスに反対するアリストテレスにとって、本節での原子論はなおさら受け容れ難いものとなるように思われる。

原子論にはまだ多くの検討の余地があるが、紙幅の限りもあり、まとまった考察は他日を期したい。なお、以上の注意は査読者の指摘による。記して感謝する。