公理的性質論における絶対的時空間の構成

和田和行

文献［１］においては，出来事という概念を基本にして時空間が構成された．ただし，［１］では時空間の体系は，ある前提された世界ｗのおけるそれであった．即ち，その基本となる出来事はｗにおいて真であるものであり，この意味で時空間の体系は世界に相対的であった．しかし，このような相対的な時空間から，一つの世界に相対的でないという意味で絶対的な時空間が構成できる．このような時空間はカントが考えたそれに対応していると考えられる．この論文ではこのような絶対的な時空間の構成について述べる．そして，このような理論に基づいて，時空間に関する伝統的な哲学的問題，たとえば，カントのアンチノミーや，分析性とアプリオリ性に関する問題，ゼノンのパラドックス，等に対して一つの解決を提示したいと思う．[1]

§１　絶対的時空間

まず，ここでは，任意の可能世界ｗに対して，“相対的時空間”，

$ST_w = \langle EVENT_w, GEOEL_w, STP_w, \Rightarrow, <_w^i\ (1 \leqq i \leqq n) \rangle$

が与えられているとする．[2] ただし，ここでの$<_w^i$は，出来事だけでなく，幾何学的要素にも拡大されたものと考える．以下では$EVENT_w$，$GEOEL_w$等の元をe_w，a_w等と表す．

あるST_wに対して，⇒，$<_w^i\ (1 \leqq i \leqq n)$及び論理記号から構成される式で，ｗのみを自由変項とし，また特定の幾何学的要素を表す記号を含まない式をΦ（ｗ）とする．このようなΦ（ｗ）によって表されている条件を，ST_wの“構造”であるという．たとえば，幾何学的要素の非対称性や移行性を述べた，［１］の§11のＴ２，Ｔ３に対応した次の定理は，ST_wの一つの構造である．

Ｔ１　$\forall a_w (\neg a_w <_w a_w)$

Ｔ２　$\forall a_w \forall b_w \forall c_w (a_w < b_w \wedge b_w <_w c_w \rightarrow a_w <_w c_w)$

集合$\{ST_w : w \in W\}$を“（相対的）時空間の体系”といい，ST と表す．そして，ST_wを“ST の世界ｗにおける時空間”という．[3]

ある時空間の体系 ST が与えられたとき，任意の世界ｗとｕに対して，ｗの幾何学的要素$GEOEL_w$とｕの幾何学的要素$GEOEL_u$の間に成り立つ，次のような条件Ｃ１を満たす関係～を考える．

Ｃ１　（ⅰ）～は同値関係である

（ⅱ）すべてのa_wに対して$a_w \sim b_u$となるb_uが唯一つ存在する：

$\forall a_w \exists ! b_u (a_w \sim b_u)$

（ⅲ）全体部分関係に関する同型対応である：

$(a_w \sim a'_u \wedge b_w \sim b'_u) \rightarrow \{(a_w \Rightarrow b_w) \equiv (a'_u \Rightarrow b'_u)\}$

（ⅳ）$<_w^i\ (1 \leqq i \leqq n)$に関する同型対応である：

$(a_w \sim a'_u \wedge b_w \sim b'_u) \rightarrow \{(a_w <_w^i b_w) \equiv (a'_u <_u^i b'_u)\}$

（ｖ）$a_w \sim b_u$のとき，a_wが出来事であれば，b_uも出来事である

（ⅵ）a_w～b_uのとき，a_wが時空点であれば，b_uも時空点である

Ｃ１の（ⅰ）と（ⅱ）より明らかに，～はｗの幾何学的要素とｕのそれとの間の一対一対応である．

このような関係～が存在するような，時空間の体系 ST を“絶対的な構造をもつ”という．以下ではこのような体系が最初に与えられているとし，それから“絶対的(absolute)時空間”，

$ST_{AB}=<EVENT_{AB},\ GEOEL_{AB},\ STP_{AB},\ \Rightarrow_{AB},\ <_{AB}{}^{i}\ (1 \leqq i \leqq n)>$

を構成する．構成の基本的な考えは，a_w～b_uとなるa_w，b_uは，直観的に言って，同じ絶対的時空間を占めるということである．

まず，～によるa_wの同値類｛b_u：a_w～b_u｝を$a_w{}^*$と表す．ここではこのような同値類を“絶対的な（時空間の）幾何学的要素”$GEOEL_{AB}$とみなすことにする．即ち，すべての可能性の集合をＷとしたとき，$GEOEL_{AB}$は次のように定義される．

Ｄ１　$GEOEL_{AB}=df\ \{a_w{}^*: w\in W\}$

このように$GEOEL_{AB}$は出来事の集合ではなく，幾何学的要素の集合の集合である．従って，絶対的な幾何学的要素は，相対的なそれと同じではない．Ｄ１と同様に，“絶対的な出来事”や“絶対的な時空点”がそれぞれ次のように定義される．

Ｄ２　$EVENT_{AB}=df\ \{e_w{}^*: w\in W\}$

Ｄ３　$STP_{AB}=df\ \{x_w{}^*: w\in W\}$

また，⇒に対応した関係$\Rightarrow_{AB}$，及び$<_{AB}{}^{i}$は次のように定義される．

Ｄ４　$a_w{}^* \Rightarrow_{AB} b_w{}^* =df\ a_w \Rightarrow b_w$

Ｄ５　$a_w{}^* <_{AB}{}^{i}\ b_w{}^* =df\ a_w <_w{}^{i}\ b_w$

Ｃ１の（ⅲ），（ⅳ）より，$\Rightarrow_{AB}$，$<_{AB}{}^{i}$はｗに相対的でなく，一義的に定まる．以下では$GEOEL_{AB}$，$EVENT_{AB}$，STP_{AB}の元を，ｗを省略してそれぞれa^*，e^*，x^*等とも表す．

さらに，文献［１］において，相対的時空間に関して⇒や$<_w$を用いて定義されたことが，$\Rightarrow_{AB}$や$<_{AB}$を用いて定義されるとする．たとえば，［１］の§７のＤ１に対応して，幾何学的要素a^*の占めている“絶対的な”場$|a^*|_{AB}$は，

Ｄ６　$|a^*|_{AB}=df\ \{x^*: a^* \Rightarrow_{AB} x^*\}$

と定義される．もちろん，$\Rightarrow_{AB}$は可能世界に相対的でないから，$|a^*|_{AB}$も可能世界に相対的でなく，一義的に定まる．

上のように種々の定義をしたとき，［１］で述べた相対的時空間に関する定理（のいくつか）が，やはり絶対的時空間に関しても成り立つ．たとえば，$<_w{}^{i}$が［１］の§10のＣ１，Ｃ２を満たすとするならば，Ｄ５よりＴ１，Ｔ２に対応した次の定理が成り立つ．

Ｔ３　$\neg a^* <_{AB}{}^{i}\ a^*$

Ｔ４　$a^* <_{AB}{}^{i}\ b^* \wedge b^* <_{AB}{}^{i}\ c^* \rightarrow a^* <_{AB}{}^{i}\ c^*$

ST_wの場合と同様に，ST_{AB} の“構造”も定義されるとする．即ち，⇒，$<_{AB}{}^{i}$（$1 \leqq i \leqq n$）及び論理記号から構成される式で，自由変項を含まず，また特定の幾何学的要素を表す記号を含まない式をΦ_{AB} とする．このようなΦ_{AB} によって表されている条件を，ST_{AB} の構造であるとする．たとえば，上のＴ３，Ｔ４（に全称記号を付加したもの）は，ST_{AB} の構造である．

時空間の体系 ST にも絶対的な構造をもつものとそうでないものとがある．ここではま

ず，ST が後者であるとする（以下では明らかな場合，$<_w^{\,i}$，$<_{AB}^{\,i}$ 等の“ｉ”を省略する）．この場合，世界はそれぞれに異なった，時空間の構造を有することになる．ここでは，［１］の§10 のＣ１に基づいて，$<_w$は順序関係である，つまり，非対称的で移行的であるとした．しかし，これは$<_w$のとりかたによっては，必ずしもすべての世界に関していえることではない．実際，我々は$<_w$に関して時空間が閉じている世界，つまり，

$e_1 <_w e_2 <_w \ldots <_w e_1$

となる出来事の系列が存在するような世界ｗを考えることができる．このような世界ｗにおいては，もし$<_w$が移行的であれば，$e_1 <_w e_1$となり，$<_w$は非対称的ではない．従って，$<_w$は順序関係ではなくなってしまう．$<_w$が移行的であること，等を除けば，［１］で述べた理論の大部分は，$<_w$が出来事に関して非対称的であるならば成り立つ．従って，時空間が閉じている場合，［１］の理論の大部分を維持するためには，$<_w$の非対称性を認め，$<_w$の（少なくとも一般的な）移行性を放棄する必要がある．

次に，ST が絶対的な時空間をもつとする．この場合，どの世界も同じ時空間の構造を有することになる．つまり，ST の世界ｗにおける時空間 ST_wの構造Φ（ｗ）に対して，$\forall w \Phi(w)$が成り立つ．このような時空間の構造は，ST から構成される絶対的時空間 ST_{AB} の文によっても表される．正確に言えば，Φ（ｗ）における$<_w$，$\Rightarrow$，a_w，b_w，c_w…をそれぞれ，$<_{AB}$，$\Rightarrow_{AB}$，a^*，b^*，c^*…に置き換えた文をΦ_{AB}とする．このとき，Ｄ４，Ｄ５より，Φ_{AB} と$\forall w \Phi(w)$は等値となる．逆に，ST_{AB} の構造を表す任意の文Φ_{AB} が与えられたとき，上記のようなΦ（ｗ）に対して，$\forall w \Phi(w)$とΦ_{AB} は等値となる．たとえば，Ｔ１，Ｔ２（に$\forall$ｗを付加したもの）はそれぞれ，Ｔ３，Ｔ４と等値となる．これらは，幾何学的要素間の非対称性と移行性は必然的である，ということを表している．もちろん，これらが成り立つとするときは，上に述べたような，時空間が閉じている可能性は最初からないものと前提していることになる．

相対的な（時空間の）幾何学的要素a_wに対しても$|a_w^*|_{AB}$を“a_wが占めている絶対的な場”という．a_wが世界ｕでも現れる，即ち，真であるときは，a_wはb_uと表されるから，$a_w = b_u$である．従って，～は同値関係だから$a_w \sim b_u$となり，$a_w^* = b_u^*$となる．それ故，Ｄ６より$|a_w^*|_{AB} = |b_u^*|_{AB}$である．このことは，幾何学的要素が占めている絶対的な場は，それが現れる世界に相対的ではなく，この意味で絶対的であることを表している．

我々は通常「もし，この机がある場所に椅子があったら，…」というような，いわゆる反事実条件文を用いる．この文の前件が表していることは次のようなことであると考えられる．即ち，“現実の世界ｗにおける机a_wの占めている場を，他の世界ｕでは椅子b_uが占めている”ということである．この前件は，相対的な時空間では偽となる．従って，上の反事実条件文は，実質的に意味をもたない．実際，その場合，時空間は世界ごとに違うのであるから，a_wとb_uが同じ場を占めているとは言えない．つまり，ST_wにおける場$|a_w|$と ST_uにおける$|b_u|$は同一ではない．一方，絶対的な時空間においては，問題の前件は，$|a_w^*|_{AB} = |b_u^*|_{AB}$ということであると考えることができる．そして，もちろんこれが真であることは可能である．従って，上のような文を有意味なものとするためには，絶対的な時空間を前提しなければならない．

カルナップは文献［２］において，時空点を個体とするような座標言語（co-ordinate language）を考えている．彼はこのような言語を認めることによって，個体の存在の偶然性が排除でき，従って論理や数学の論理主義が擁護できると考えた．ここでの理論的枠組みに従えば，このような言語は，Ｄ３で定義された絶対的な時空点 STP_{AB} を個体とみなすものと解釈できる．このような個体ｘ*は，世界ｗ，ｕ，ｖ，．．．におけるそれぞれの時空点 x_w，x_u，x_v，．．．対して，$x^* = x_w^* = x_u^* = x_v^* =$ ．．．となるものである．つまり，個体ｘ*は，世界ｗ，ｕ，ｖ，．．．においてそれぞれ，x_w，x_u，x_v，．．．として現れる．このような言語は，Ｃ１の（ⅳ）を除く条件を満たす時空間の体系を認めるならば可能である．さらに，（ⅳ）を認めるかどうかによって，時空間の体系が絶対的な構造をもつものと，そうでないものに分かれることになる．カルナップは時空間の絶対性については何も述べてはいない．しかし，いずれにせよ，上記のように考えるならば，彼の座標言語や論理主義の擁護も正当化できると思われる．

§２　分析性とアプリオリ性

周知のように,カントは感性の形式としての絶対的な時空間の存在を認めた.それは様々な現象を内容として含む，いわば容器のような存在である．彼によれば，時空間は我々にアプリオリに備わった，唯一の認識の枠組みである．そして，内容がどのようなものであるかはアポステリオリにしか決まらないが，時空間の構造について述べた命題は，総合的であるが，感性の形式の純粋な認識としてアプリオリであると考えた．たとえば，彼に従えば，時空間はユークリッド的であるが，そのことを述べた命題は，アプリオリで総合的である．しかし，このような説は，その後の物理学等の進歩によって否定されてしまった．従って，現代ではカント言うことをそのまま受け入れることはできない．けれども，上に述べたような時空間の理論によれば，ある程度はカントの主張も意味のあることになるのではないかと思われる．以下ではこのような問題について考察する．

まず，分析性とアプリオリについて簡単に述べる．ここでは，これらの概念は正確には文に適用されるものとする．そして，ある文が分析的に真であるということは，その文の意味している事態ｐが必然的であるということ，つまり□ｐということであるとする．また，ある文が分析的に偽であるということは，その文の意味ｐが不可能であるということ，つまり□￢ｐということであるとする．従って，（真偽にかかわらず）ある文が分析的であるということは，その文の意味ｐが論理（確定）的であるということ，即ち□ｐ∨□￢ｐということである．もちろん，分析的でない文が総合的である．従って，総合的文は，その意味ｐが論理的でない，即ち，偶然的である．それ故，分析性，総合性は，論理的な概念であり，意味論に属する．一方，アプリオリ性は，認識主観，たとえばある人に相対的な概念であると考えられる．即ち，ある文がアプリオリに真（あるいは偽）であるということは，ある認識主観がアプリオリに，即ち，経験に依存せずにその文を真（あるいは偽）と決定することができるということであると考えられる．もちろん，アプリオリでない文がアポステリオリである．従って，アプリオリ性，アポステリオリ性は，認識論的な概念であり，語用論に属する．周知のように，カント以前の多くの哲学者，あるいはカント以後でも論理実証主義者達は，これらの概念はそれぞれ一致すると考えた．即ち，次のことが成り立つと考えた．

（ｉ）　分析的＝アプリオリ，総合的＝アポステリオリ

確かに，論理的な概念と認識的なそれを一致させるという立場をとるならば，（ｉ）のように考えることも不可能ではない．しかし，それらは本来異なった概念であり，必ず一致させなければならないということはいえないだろう．そこで，ここでは（ｉ）を認めない立場も可能であると前提して論を進めることにする．

世界の状態を記述するとき，我々はある時空間の体系 ST を前提していると考えられる．この意味で，そのような体系は，まさにカントの言うような“認識の枠組み”と言うこともできるだろう．もちろん，カントの場合，それは心理的なものであるが，ここでのそれは論理的なものである．先にも述べたように，時空間の体系にも絶対的な構造をもつものとそうでないものとが考えられる．そして，我々はどちらを採用することも可能である．もし，ST が後者であるとすれば，その時空間の構造は世界ごとに違っている．しかし，ST が前者であるとすれば，先にも述べたように，その時空間の構造はすべての世界で共通であるから，ST から構成される絶対的時空間 ST_{AB} の構造について述べた文は，分析的ということになる．おそらくカントが考えていた時空間は，このような絶対的なものであると思われる．それ故，カントの説とはまったく逆に，絶対的時空間の構造について述べた文は分析的であるということになる．

それではアプリオリ性についてはどうであろうか．もし我々が（ｉ）を認める立場をとったとすれば，時空間の構造について述べた文は，アプリオリということになる．従って，それらの文は，分析的でアプリオリなものである．一方，（ｉ）を認めない立場をとった場合はどうなるであろうか．

現実の世界の時空間がどのような構造をもっているかということは，我々はアプリオリには知りえない．確かに，現実の世界ｗに対しても$<_w$は集合であり，従って，任意のｅ，ｆに対して，$e <_w f$ は論理的であり，（そのことを述べた文は）分析的と言ってよいだろう．しかし，このことは，$e <_w f$ がアプリオリであることを意味しない．実際，我々は今ｗが現実の世界であると仮定しているが，それが具体的にどのようなものであるかを，我々は完全には知っていない．ｗあるいはその部分がどのようなものであるかは，我々はアポステリオリにしか知りえない．以下ではこのことをもう少し詳しく分析する．

ここで，ある相対的な時空間の体系 ST が与えられているとし，これに基づいて出来事間の関係$<_{AC}$を次のように定義する（“$_{AC}$”は accidental（偶然的）を表している）．[(4)]

Ｄ１　$e <_{AC} f \equiv_{df} \exists w\,(AW(w) \wedge e <_w f)$

ある時空間の体系を採用するということは，それに対応した$<_{AC}$を採用するということである．逆に，$<_{AC}$が最初に与えられているとすれば，$<_w$を次のように定義することも可能である．

Ｄ２　$e <_w f \equiv_{df} w \Rightarrow (e <_{AC} f)$

このとき，［１］の§４のＴ１３より，$e <_{AC} f \equiv \exists w\,\{AW(w) \wedge w \Rightarrow (e <_{AC} f)\}$ だから，Ｄ１が成り立つことになる．

すべてのｗに対して，AW（ｗ）ということは論理的でないから，Ｄ１より，一般的に $e <_{AC} f$ は論理的でない，即ち，分析的でない．それ故，また $e <_{AC} f$ はアプリオリでない，即ち，アポステリオリであると考えられる．Ｄ１より，次のことがいえる．

Ｔ１　$AW(w) \rightarrow (e <_{AC} f \equiv e <_w f)$

我々は，ｗが現実の世界であると仮定しているとき，$e <_{AC} f$ をアポステリオリに知れば，

Ｔ１に基づいてｅ$<_w$ｆと結論できる．つまり，ｅ$<_w$ｆをアポステリオリに知ることができるのである．

このような知識に加えて，何らかの仮説を採用すれば，我々は現実の世界の時空間の構造を，アポステリオリに決定できる．このようにして我々は，実際には不可能かもしれないが，原理的には現実世界の時空間の構造をすべて決定できる．このとき，我々はさらに，すべての世界がこのような現実の世界の時空間と同じ構造をもった，絶対的な構造をもつ時空間の体系 ST’を考えることができる．このような ST’から構成される絶対的時空間 ST'_{AB} が，まさにカントの主張したそれであると考えることができる．従って，このような体系 ST'_{AB} の時空間の構造（について述べた文）は，アポステリオリに知られるということになる．もちろん，それはまた分析的である．それ故，それは分析的でアポステリオリということになる．従って，カントと同様（ｉ）を認めない立場をとっても，彼の説とは異なった結論に至ってしまう．しかし，実際に我々が行っている，時空間の構造の認識過程というのは，上に述べたようなものに近いのではないかと思われる．

§３　カントのアンチノミー

周知のように古代より現代に至るまで，世界あるいは時空間に関しては，それは無限に分割でき，最終的には大きさ（延長）のない点に至るという考えと，それとは反対に，時空間には最小の大きさがある，即ち，それより小さな部分が存在しない，ある大きさをもった部分から時空間は構成されているという考えがある．カントはこの問題を世界のアンチノミーとして，悟性の範囲では解決できないものと考えた．しかし，上記のような時空間の理論に基づけば，これらは矛盾のない考えとして統一できると思われる．

ここで，絶対的な構造をもつ（あるいはＣ１の（ⅳ）を除く条件を満たす）時空間の体系 ST を考える．そして，関係～に基づいて ST から構成される絶対的時空間を ST_{AB} とする．ST に関して時空間が無限に分割できるということは，どの出来事にもその真部分が存在するということであると考えられる．その場合，出来事の数は無限でなければならない．もちろん，有限個の可能世界のみ考えるならば，このことは不可能である．事態は可能世界の集合と一対一に対応しているのであるから，出来事の数は有限になってしまうからである．しかし，無限個の可能世界を考えるならば，それは可能となる．可能世界の数を有限あるいは無限いずれと考えるかは，言語の選択の問題であって，どちらが正しいとはいえないだろう．もし無限と考えるならば，上にも述べたように，どの出来事にもその真部分が存在するということは可能である．しかし，このことは，時空間には最小の大きさがあるということを否定しているように見える．実際，時空間に最小の大きさがあるということは，最小の出来事がある，つまり，真部分をもたない出来事があるということと考えられる．

けれども，出来事 e_w が最小であるということは，e_w の“内部が識別不可能”ということであるとも解釈できる．e_w の内部が識別不可能ということは，e_w のどんな真部分ｆをとっても，e_w の内部でｆ以外の部分（即ち，$e_w \wedge \neg f$）と，ｆがどのような基準に従っても識別できないということである．すると，ｗのある出来事 e_w が最小であるということは，e_w の“内部が識別不可能”ということであるとも解釈できる．もちろん，この場合，“識別できない”ということが，どのような基準に基づいているかが問題である．し

かし，そのような基準として，たとえば何らかの物理的なそれをとるならば，e_wの内部が識別不可能ということと，e_wが真部分を有するということは矛盾しないと思われる．

さらに，“絶対的出来事$|e_w^*|_{AB}$の内部が識別不可能”ということは，e_wの内部が識別不可能ということであるとする．ここで，e_wがｆを真部分としているとする．このとき，$e_w \Rightarrow f$であるが，$f \Rightarrow e_w$ではないから，後者より$f \wedge \neg e_w$が可能である．従って，ｗ以外のある世界において，ｆは真であるがe_wは真ではない．このとき，次のようなことが成り立つとする．即ち，そのような世界ｕのなかに，$e_w \sim e_u$であって，e_uの内部でｆ以外の部分と，ｆが識別できるe_uが存在するものがある．このとき，当然e_uは内部が識別不可能である．また，$e_w \sim e_u$だから，e_wとe_uは絶対的時空間 ST_{AB} において同じ場を占めている．従って，e_wの内部が識別不可能であっても，e_wの占める絶対的時空間の場は，内部の識別が可能である．つまり，そのような場はいわば，ｗにおいては内部が識別不可能であっても，ｕにおいては識別可能となる．

それ故，どの出来事にもその真部分が存在するという意味で，時空間に最小の大きさがないということと，内部が識別不可能な出来事があるという意味で，時空間に最小の大きさがあるということとは矛盾しないのである．

カントがもう一つのアンチノミーとしてあげた，世界あるいは時空間に果てがあるかどうか, 即ち, それに最大の大きさがあるか否かという問題も, 同様に考えることができる．最大の大きさがあるということは，最大の出来事があるということと考えられる．もし無限の可能世界を認めるならば，どの出来事にもそれを真部分とする出来事があるということは可能と思われる．そして，このことは，最大の出来事がないということであると考えられる．

けれども，出来事e_wが最大であるということは，ｗにおけるe_wの外部（即ち，$w \wedge \neg e_w$）が識別不可能ということであるとも解釈できる．ここでは詳しくは述べないが，上に述べた最小の大きさの場合と同様なことが，この場合でもいえる．

従って，どの出来事にもそれを真部分とする出来事が存在するという意味で，時空間に最大の大きさがないということと，外部が識別不可能な出来事があるという意味で，時空間に最大の大きさがあるということとは矛盾しないの．

このように考えるならば，世界に最小あるいは最大の部分がある（あるいはない）というカントのアンチノミーは，まさにアンチノミーではなく，矛盾なく統一できると思われる．

§４　ゼノンのパラドックス

この節では，ゼノンのパラドックスの一つ有名な，アキレスと亀の問題を論じる．この問題を論じる前にここでは，いわゆる時空点の座標が実数であるような，相対的な時空間，$ST_w = \langle w, EVENT, GEOEL, STP, <^1 \rangle$の構造を考察する（以下$<^1$を$<$と記す）．

まず，ここでは出来事に２つの有理数の組が一対一に対応しているとする．即ち，$m < n$となる有理数ｍ，ｎの組に対応しているとする．この節ではこのような組を（ｍ，ｎ）と表す．これは表記通り，開区間に対応しているが，それがｍとｎの間の有理数あるいは実数を含んでいると考える必要はない．以下では，（ｍ，ｎ）に対応した出来事をｅ（ｍ，ｎ）とする．ここで，次のことが成り立つとする．

C１　$e(m_1, n_1) \Rightarrow e(m_2, n_2) \equiv m_1 \leqq m_2 \wedge n_2 \leqq n_1$
また，<を次のように定義する．
C２　$e(m_1, n_1) < e(m_2, n_2) \equiv n_1 \leqq m_2$
このとき明らかに，［１］の§10のＤ２より，<に対応した全体部分関係$\Rightarrow^1$に対して次の定理が成り立つ．
Ｔ１　$e \Rightarrow^1 f \equiv e \Rightarrow f$
また，<は§10のＣ１，Ｃ２を満たす．さらに，Ｔ１，［１］の§11のＴ15より$a \Rightarrow^1 b \equiv a \Rightarrow b$となる．従って，時空点x，yに対しても$x \Leftrightarrow^1 y \equiv x = y$となるから，$[x]^1 = \{x\}$．それ故，$ST_w$は１次元である．
有理数kに対して，$m<k<n$のときは，$e(m, k) < e(k, n)$となるが，この場合，$e(m, k) < f < e(k, n)$となる出来事fは存在しない．そのようなfに対応した開区間は存在しないからである．この意味で，出来事は不連続あるいは離散的（discrete）である．なお，$e(m, n)$は，$e(m, k)$と$e(k, n)$の連言と見なすことができる．それらの間には，何も出来事が存在しないからである．
ここで，有理数kに対して次のように定義する．
Ｄ１　$\alpha_k =\mathrm{df} \{e(m, n) : m<k<n\}$
以下では明らかな場合，α_kのkを省略する（以下のβ_k，γ_kに関しても同様とする）．このようなαは［１］の§６のＴ５を満たしている．ここでは，このような条件を満たす集合は，すべて抽象的集合であるとする．従って，αは抽象的集合であり，$\Sigma\alpha$は幾何学的要素である．ここで，
Ｄ２　$\beta_k =\mathrm{df} \{e(m, k) : m<k\}$
とすれば，$\alpha \cup \beta$も［１］の§６のＴ５を満たすし，従って，抽象的集合である．$\alpha \subseteq \alpha \cup \beta$であるから，$\Sigma\alpha \Rightarrow \Sigma(\alpha \cup \beta)$である．このとき，次の定理が成り立つ．
Ｔ２　$\Sigma(\alpha \cup \beta) = \Sigma\beta$
証明　jを$j<k$となるある有理数とする．［１］の§６のＤ２に基づいて，$\alpha \cup \beta$の$e(j, k)$に限定された抽象的集合をβ'とする．即ち，
$$\alpha \cup \beta / e(j, k) = \beta'$$
とすれば，［１］の§６のＴ４より，
$$\Sigma(\alpha \cup \beta) = \Sigma\beta' \cdots ①$$
である．さらに，$\beta' \subseteq \beta$であるから，
$$\Sigma\beta' \Rightarrow \Sigma\beta \cdots ②$$
となる．一方，$e(m, k) \in \beta$となる$e(m, k)$に対しては，$m \leqq m' < k \wedge j \leqq m'$となる$m'$をとれば，$e(m, k) \Rightarrow e(m', k)$，$e(m', k) \in \beta'$となる．従って，$e(m', k) \Rightarrow \Sigma\beta'$だから，$e(m, k) \Rightarrow \Sigma\beta'$．従って，$\forall e(e \in \beta \rightarrow e \Rightarrow \Sigma\beta')$．それ故，$\Sigma\beta \Rightarrow \Sigma\beta'$である．従って，②より，$\Sigma\beta = \Sigma\beta'$である．それ故，①より，定理が成り立つ．
$\Sigma\alpha \Rightarrow \Sigma(\alpha \cup \beta)$，Ｔ２より，
Ｔ３　$\Sigma\alpha \Rightarrow \Sigma\beta$
しかし，この逆は言えない．実際，αと$\alpha \cup \beta$は抽象的集合であるが，$j<k$となるあるjに対する$e(j, k)$は，$\alpha \cup \beta$には属しているが，αには属していない．従って，

$\Sigma(\alpha\cup\beta)\Rightarrow\Sigma\alpha$ではない．それ故，T３より，$\Sigma\beta\Rightarrow\Sigma\alpha$ではない．同様に，

D３　$\gamma_k =_{df} \{e(k, n) : k < n\}$

とすれば，βのかわりにγをとっても，上に述べたことは成り立つ．さらに，次の定理が成り立つ．

T４　$\Sigma\alpha = [\Sigma\beta\wedge\Sigma\gamma]$

証明　$\Sigma\alpha\Rightarrow\Sigma\beta$，$\Sigma\alpha\Rightarrow\Sigma\gamma$より，$\Sigma\alpha\Rightarrow[\Sigma\beta\wedge\Sigma\gamma]$である．この逆を証明するために，$\Sigma\beta\wedge\Sigma\gamma$とする．このとき，当然$\Sigma\beta$は真であるから，ある$m$（$m<k$）に対して，$e(m, k)\in\beta$でかつ真となる$e(m, k)$が存在する．同様に，$\Sigma\gamma$が真より，ある$n$（$k<n$）に対して，$e(k, n)$が真となる．それ故，$e(m, k)\wedge e(k, n)$が真となる．先にも述べたように，$e(m, k)\wedge e(k, n)$は$\alpha$に属する$e(m, n)$という出来事と同じと見なすことができる．従って，$e(m, n)\wedge e(m, n)\in\alpha$であるから，$\Sigma\alpha$が真となる．以上より，$(\Sigma\beta\wedge\Sigma\gamma)\Rightarrow\Sigma\alpha$となる．それ故，定理が成り立つ．

それ故，$\Sigma\alpha$は$\Sigma\beta$，$\Sigma\gamma$という部分に分けられることになる．$\alpha\cup\beta$は抽象的集合であるからT２より，$\Sigma\beta$は幾何学的要素であり，$\Sigma\gamma$も同様である．従って，$\Sigma\beta$，$\Sigma\gamma$を部分とする$\Sigma\alpha$は時空点ではない．さらにここでは，$\Sigma\beta$，$\Sigma\gamma$は時空点であるとする．

D１はkが有理数ではなく，無理数の場合にも拡張できる．しかし，この場合，$\Sigma\beta_k$や$\Sigma\gamma_k$は幾何学的要素ではなく，従って時空点でもない．実際，kが無理数の場合は，$e(k, n)$や$e(m, k)$に対応した出来事は存在せず，D２やD３は意味をもたない．従って，$\Sigma\alpha_k$はそれ以上分割できず，それ自身が時空点となる．

kが有理数のとき，$\Sigma\alpha_k$は通常，時空点とされているものと考えられる．そこで，kが無理数の場合も含めて，$\Sigma\alpha_k$を“通常の時空点”といい，a_kと表す．そして，kが有理数のとき，D２，D３の$\Sigma\beta_k$，$\Sigma\gamma_k$を“a_kを構成する時空点”ということにする．

通常の時空点a_kに対して，実数kをa_kの座標という．明らかに，通常の時空点と座標は一対一に対応している．２つの通常の時空点の距離（長さ）は，それらの座標の差の絶対値として定義される．ある通常の時空点を構成する時空点x，yは不連続である．つまり，$x<z<y$となるzは存在しない．これは先に述べた出来事の不連続性に対応している．一方，通常の時空点のみを考えれば，これらは連続となる．

ここで，任意の実数m，n（$m<n$）に対して次のように定義をする．

D４（ⅰ）$a(m, n) =_{df} \Sigma\{e(m', n') : m'\leqq m\wedge n\leqq n'\}$（$m$，$n$は有理数）

（ⅱ）$a[m, n) =_{df} \Sigma\{e(m', n') : m'<m\wedge n=n'\}$（$n$は有理数）

（ⅲ）$a(m, n] =_{df} \Sigma\{e(m', n') : m'=m\wedge n<n'\}$（$m$は有理数）

（ⅳ）$a[m, n] =_{df} \Sigma\{e(m', n') : m'<m\wedge n<n'\}$

$[m, n]$は，閉区間に対応している．通常の時空点やそれらを構成する時空点を除く幾何学的要素は，これらの４つの対象のどれかと考えることができる．たとえば，$a[m, n]$は線分の閉区間に対応している．実際，D４の$=_{df}$の右辺に現れる集合をαとすれば，明らかにαは［１］の§６のT５を満たし，従って抽象的集合である．それ故，４つの対象は幾何学的要素となる．なお，$a(m, n)=e(m, n)$であり，$a(m, n)$は出来事となる．また，D４の（ⅱ）～（ⅳ）において，$m=n$の場合も許すとすれば，それらは通常の時空点やそれらを構成する時空点になる．

ゼノンのアキレスと亀のパラドックスも，上に述べた時空間が無限に分割できるか否かという問題と結びついている．いずれにせよ，アキレスが亀に追いつくためには，時空間にある種の不連続性を求めなければならないだろう．しかし，このことは，時空間が無限に分割できること，即ち，どの出来事にもその真部分が存在するということと矛盾しない．§３でも述べたように，このことは，ある世界における出来事に，内部が識別不可能という意味で最小のものがあるということとは矛盾しない．我々はさらに，ある世界におけるすべての出来事が，そのような意味で最小の部分から構成されていると考えることもできる（この場合もちろん，最小の部分の真部分は，世界の出来事からは除いている）．さらに，そのような最小の部分は，ある一定の大きさ，たとえばプランク定数によって決定されるようなそれ，をもつと考えることもできる．そのような最小の出来事は，いわばその世界における実質的な時空点である．そのような二つの出来事が（ある時空的順序関係$<$に関して）不連続であることは可能である．たとえば，先の１次元時空間の$e(m, k)$と$e(k, n)$はこのようなものである．そして，すべての可能世界がこのようなものであるとすれば，どの世界においてもアキレスは亀に不連続な変化において，いわば一瞬で追いつくのである．

上記のことをより正確に表現すれば，次のようになる．まず，§３におけるような時空間の体系を ST とし，ST の世界wにおける時空間をST_wとする．ST_wは二次元以上とし，その２つの，出来事間の前後関係を$<^1$，$<^2$とする．たとえば，$<^1$は時間的前後関係，$<^2$はある空間的前後関係とする．また，eをアキレス，fを亀とし，アキレスの（内部が識別不可能という意味で）最小の部分をe_1とする．そして，［１］の§12 で定義された，e_1と同じ時間における亀の部分をf_1とする．即ち，$e_1 \Leftrightarrow^1 f_1$とする．また，$e_1$は$f_1$より$<^2$に関して後方にいるとする．即ち，$e_1 <^2 f_1$であるとする．さらに，$e_1$より未来における，アキレスのある最小の部分を$e_2$とし，$e_2$と同じ時間における亀の部分を$f_2$とする．即ち，$e_1 <^1 e_2$であって$e_2 \Leftrightarrow^1 f_2$とする．このとき，$e_1$と$e_2$がそれぞれ占める時間$〔e_1〕^1$，$〔e_2〕^1$は不連続であるが，もはや$e_2$は$f_2$に追いついているということは可能である．つまり，$\neg\exists g\,(e_1 <^1 g <^1 e_2)$であって，$\neg e_2 <^2 f_2$となることは可能である．

もちろん，最小の部分の大きさは，すべての世界で同じでとはかぎらない．どの世界に対しても，最小の部分の大きさがより小さくなるような世界が存在すると考えることは可能である．このようなすべての世界における不連続性を一般に表しているのが，先に述べた時空点の不連続性である．先にも述べたように，このようなことは，すべて時空間が無限に分割できることと矛盾しない．このように考えるならば，アキレスと亀のパラドックスは，パラドックスではなくなる．

もう一つのゼノンのパラドックスである飛矢静止論も次のように考えるならば，パラドックスではなくなるだろう．周知のように，飛矢静止論というのは，簡単に言えば次のようなものである．即ち，ある長さをもった時間（間隔）において飛んでいる矢も，長さのない一瞬というものを考えれば，その瞬間には静止している．しかし，その時間というのも結局は瞬間の集まりにすぎない．従って，その時間において矢は飛ぶことはできない．なぜなら，静止した矢をいくら集めても，それが運動するということはありえないからである．

上と同様に，ある時空間の体系 ST の世界 w における時空間を ST_w とする．ここで，ある矢が飛んでいるということを ST_w の出来事 e とする．e は飛んでいる矢ということもできる．このとき，［１］の§12 のＤ２，Ｄ１に従えば，e の持続する時間 e^T に対しては，$e^T=\Pi〔e〕^T=\Pi\{b : e\Leftrightarrow^T b\}$ である．$e\Leftrightarrow^T e$ より，$e\in\{b : e\Leftrightarrow^T b\}$ だから，$\Pi\{b : e\Leftrightarrow^T b\}\Rightarrow e$．それ故，次のことがいえる．

（ｉ） $e^T\Rightarrow e$

また，e^T が含む瞬間（時刻）というのは，$e^T\Rightarrow x^T$ となる x^T である．従って，［１］の§12 の最後で述べた１次元時空間においては，次のことが成り立つ．

（ⅱ） $e^T=\Pi\{x^T : e^T\Rightarrow x^T\}$

さらに，矢 e の時刻 x^T における状態，即ち，e の x^T におけるいわば切片というのは，e と x^T の共通部分でもっとも大きな時空間を占めるものと考えられる．そして，これは e と x^T との選言（である事態）$[e\vee x^T]$ である．このような状態は，ある意味では“静止している”といえる．確かにそれは事態であるが，運動が起こっているような出来事ではない．しかし，そうであっても，それらを全部集めたものが静止しているとはいえない．事実，この場合，そのような事態の集合 $\{[e\vee x^T] : e^T\Rightarrow x^T\}$ の論理積は，まさに飛んでいる矢そのものになる．即ち，$\Pi\{[e\vee x^T] : e^T\Rightarrow x^T\}=e$ となる．実際，（ｉ），（ⅱ）より，$\Pi\{[e\vee x^T] : e^T\Rightarrow x^T\}=[e\vee\Pi\{x^T : e^T\Rightarrow x^T\}]=[e\vee e^T]=e$ となる．このように考えるならば，アキレスと亀の場合と同様，飛矢静止論もパラドックスではなくなる．

ここで述べた問題以外にも，上記の時空間の理論は，哲学や諸科学における様々な問題の解決のための基本的枠組みとなることができると思われる．

注

（１）本論文は文献［１］を前提にしている．詳しくは［１］を参照されたい．なお，本論文ではカントの説等の,いわゆる哲学的な常識に関する文献についての言及は省略する．

（２）ST_w は［１］，ｐ55 の最初で述べた“時空間の体系”と同じである．ただし，表記の仕方は少し違っている．

（３）上でも述べたように，本論文では［１］における「時空間の体系」を単に「時空間」という．従って，本論文で「時空間の体系」といわれるのは，［１］の用語では「時空間の体系の体系」といわれるべきものである．

（４）以下の定義等に関しては，［１］の§４参照．

参考文献

［１］ 和田和行，「公理的性質論における相対的時空間の構成」『論理哲学研究第５号』，日本論理哲学会編，2007

［２］ R.Carnap，*Meaning and Necessity,* The University of Chicago press 1975(first published 1947),pp75-81

（日本大学教授）