

公理的性質論における相対的時空間の構成

和田和行

時空間に関しては、周知のように哲学的には二つの基本的な考え方が存在する。一つは、ライプニッツに代表されるように、出来事から離れて時空間はありえないとする考え方である。彼によれば、現象あるいは出来事は、それぞれの可能世界において異なっているから、時空間も可能世界ごとに違ったものとなる。この意味で、時空間はいわば可能世界に相対的なものである。もう一つは、カントに代表されるように、時空間はいわば出来事の入力物であって、すべての可能世界において同一であるとする考え方である。このような時空間は、可能世界に相対的ではないという意味で、いわば絶対的なものである。

このような二つの考え方にはそれぞれ長所と短所があるが、ここでは基本的にはライプニッツに従って、出来事から時空間が構成され、従って時空間は可能世界に相対的であるとする。けれども、カント的な絶対的時空間を排除するのではなく、それはライプニッツ的な相対的時空間からやはり論理的に構成されたと考える。そして、このような構成を具体的に行うことによって、両者は矛盾するものではなく、統一が可能であることを示そうと思う。さらに、時空間に関する伝統的な哲学的問題、例えば、ゼノンのアキレスと亀のパラドックスや、カントの世界に関するアンチノミーに対する一つの解決を提示したい。ただし、紙幅の関係上、この論文では相対的時空間の構成のみを行い、絶対的なその構成や哲学的問題の解決は他の論文に譲ることとする。

§ 1 公理的性質論 MZ F

ここでは上に述べたような構成の基礎的な体系として、“公理的性質論 (Axiomatic Property Theory)” の一つである “MZ F (Modal Z F)” という公理体系をとる。以下に述べるように、MZ F は第 1 階の様相述語論理 S 5 と、Zermelo-Fraenkel の公理的集合論 Z F を組み合わせた体系である。⁽¹⁾

MZ F は Z F と同様、変項 x, y, z 及び u, v, w を有する（以下では必要に応じて $x', x_1, x_2, \dots$ も用いる。他の変項に関しても同様とする）。ただし、これらの変項は集合ではなく、性質を表しているとする。後にも述べるように、MZ F においては集合や個体、時空点等の対象は、性質の特殊なものとして扱われる。従って、MZ F はいわば性質一元論の立場をとるものである。また、MZ F は $x \in y, x = y$ という式を有するが、これらはそれぞれ、“性質 x が性質 y を有する” こと、“性質 x が性質 y と同一である” ことを表している。MZ F は次のような論理記号を有している。

結合記号： $\neg$ (否定), $\wedge$ (連言), $\vee$ (選言), $\rightarrow$ (含意), $\equiv$ (等値),
 $\Box$ (必然), $\Diamond$ (可能)

量化記号： $\forall$ (全称), $\exists$ (存在)

さらに、かっこ (), { }, [] も用いられる。MZ F の式一般は、これらの式と記号から Z F と同様にして（ただし様相記号 $\Box, \Diamond$ も用いて）構成される。これらの式を Φ, Ψ で表す。また、MZ F においては新しい表現が定義によって導入されるが、ここではこ

これらの定義は公理と見なすことにする．この論文では，公理，定義，定理をそれぞれ ‘A’，‘D’，‘T’ で表す．また，定義を $\equiv_{df}$ ， $=_{df}$ で表す．以下で公理，定義，定理として述べられる式 Φ は，正確にはその必然性に関して閉じた式 $\Box \Phi$ であるとする．さらに， Φ が自由変項 x ， x_1 ， $\dots$ ， x_n を含むときは，その全称に関して閉じた式， $\forall x \forall x_1 \dots \forall x_n \Box \Phi$ であるとする．以下では括弧の省略等も通常の規約に従う．論理記号の結合力は，この論文で導入された順序において先のものほど強いとする．ただし， $\Box$ ， $\Diamond$ ， $\forall$ ， $\exists$ は他のものより強いとする．

MZF は（等号を含む）公理体系 S5 に，以下に述べる公理を付け加えたものである．公理に先だって次のように定義する．

$$D1 \quad \Phi \Rightarrow \Psi \equiv_{df} \Box (\Phi \rightarrow \Psi)$$

$$D2 \quad \Phi \Leftrightarrow \Psi \equiv_{df} \Box (\Phi \equiv \Psi)$$

$$D3 \quad \Delta \Phi \equiv_{df} \Box \Phi \vee \Box \neg \Phi$$

$\Phi \Rightarrow \Psi$ ， $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ のとき，それぞれ，“ Φ は Ψ を論理的に含意する”，“ Φ と Ψ は論理的に等値である” と言う．また， $\Delta \Phi$ のとき，“ Φ は論理（確定）的である” と言う．S5 において $\Delta \Phi$ は $\Phi \Leftrightarrow \Box \Phi$ あるいは $\Phi \Leftrightarrow \Diamond \Phi$ と等値である（この論文では S5 における証明は省略する）．“ Φ が偶然的” ということは， Φ が論理的でないということである．実際，

$$\neg \Delta \Phi \equiv \neg (\Box \Phi \vee \Box \neg \Phi) \equiv (\neg \Box \Phi \wedge \neg \Box \neg \Phi) \equiv (\Diamond \neg \Phi \wedge \Diamond \Phi)$$

であるから， $\neg \Delta \Phi$ ということは， Φ も $\neg \Phi$ も可能，即ち， Φ が偶然的ということである．ZF と同様，包摂関係を表す $\subseteq$ を次のように定義する．

$$D4 \quad u \subseteq v \equiv_{df} \forall x (x \in u \rightarrow x \in v)$$

また，“ u と v の外延が等しい” ということを $u \equiv v$ と表す．即ち，

$$D5 \quad u \equiv v \equiv_{df} \forall x (x \in u \equiv x \in v)$$

このように，ここでは結合記号 $\equiv$ を外延の同一を表すものとしても用いるが，両辺の記号からそれらの違いは明らかであろう．

MZF は次のような公理を有する．（A8 が含む 0 や $v \cup \{v\}$ は後に定義される．）

$$A1 \quad \Box (u \equiv v) \rightarrow u = v$$

$$A2 \quad \exists v \forall x [x \in v \Leftrightarrow \{x \in u \wedge \Phi(x)\}]$$

$$A3 \quad \exists w \forall x \{x \in w \Leftrightarrow (x \in u \wedge x \in v)\}$$

$$A4 \quad \exists u \forall z \{z \in u \Leftrightarrow (z = x \vee z = y)\}$$

$$A5 \quad \exists v \forall x \{x \in v \Leftrightarrow \exists w (x \in w \wedge w \in u)\}$$

$$A6 \quad \exists w \forall v \{v \in w \Leftrightarrow \Box (v \subseteq u)\}$$

$$A7 \quad \forall x \forall y \forall z [\{\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z)\} \Rightarrow y = z] \rightarrow \\ \forall u \exists v \forall y [y \in v \Leftrightarrow \exists x \{x \in u \wedge \Phi(x, y)\}]$$

$$A8 \quad \exists u \{0 \in u \wedge \forall v (v \in u \rightarrow v \cup \{v\} \in u)\}$$

MZF はこれらの公理に，後に述べる A9 と A10 を付け加えた体系である．以下ではこのような MZF の定理，定義を述べる．

性質 u ， v は単にそれらの外延が等しいだけではなく，そのことが必然的であるとき，同一であるとする．即ち，公理 A1 が成り立つとする．

式 $\Phi(x)$ に対して $\forall x \{x \in u \Leftrightarrow \Phi(x)\}$ となる性質 u が存在するときは，A1 よりこのような u は唯一つ存在する．以下ではこれを $[x : \Phi(x)]$ と表す．

$$D6 \quad [x : \Phi(x)] = u \equiv_{df} \forall x \{x \in u \Leftrightarrow \Phi(x)\}$$

以下、逐一定理としては述べないけれども、 $[x : \Phi(x)]$ という表現が用いられるときは、 $\forall x \{x \in u \Leftrightarrow \Phi(x)\}$ となる u が存在することが証明される。

公理に基づいて、MZ F の項が次のように定義される。これらは Z F で用いられる項に対応している。定義の後の括弧の中は、対応した Z F の項の名前である

$$D7 \quad 0 =_{df} [x : x \neq x] \quad (\text{空集合})$$

$$D8 \quad u \cap v =_{df} [x : x \in u \wedge x \in v] \quad (\text{積 (集合)})$$

$$D9 \quad u \cup v =_{df} [x : x \in u \vee x \in v] \quad (\text{和 (集合)})$$

$$D10 \quad \{x, y\} =_{df} [z : z = x \vee z = y] \quad (\text{対集合})$$

$$D11 \quad \{x\} =_{df} \{x, x\} \quad (\text{単集合})$$

$$D12 \quad 1 =_{df} \{0\} \quad (\text{自然数の 1})$$

$$D13 \quad \langle x, y \rangle =_{df} \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad (\text{順序対})$$

$$D14 \quad \cup u =_{df} [x : \exists v (x \in v \wedge v \in u)] \quad ((\text{一般的}) \text{和})$$

$$D15 \quad \cap u =_{df} [x : \forall v (v \in u \rightarrow x \in v)] \quad (u \neq 0 \text{ のとき}) \quad ((\text{一般的}) \text{積})$$

$$D16 \quad Pw(u) =_{df} [v : \square (v \subseteq u)] \quad (\text{べき集合})$$

$$D17 \quad REL(u) \equiv_{df} \forall x \{x \in u \Rightarrow \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle)\} \quad (\text{関係})$$

$$D18 \quad FNC(u) \equiv_{df} REL(u) \wedge \forall x \forall y \forall z \{(\langle x, y \rangle \in u \wedge \langle x, z \rangle \in u) \Rightarrow y = z\} \quad (\text{関数})$$

§ 2 集合

MZ F においては、集合を性質の特殊なものとして扱う。まず、任意の x に対して $x \in u$ が論理的であるとき、 u もやはり“論理的な性質”という。そして、集合はこのような論理的な性質であるとする。即ち、MZ F においては、“性質 u は集合である”ということ SET(u) と表し、次のように定義する。

$$D1 \quad SET(u) \equiv_{df} \forall x \triangle x \in u$$

後にも述べるように、集合をこのようなものと考えれば、MZ F において Z F の公理をすべて証明することができる。以下では変項 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ で集合を表す。MZ F においては集合でない性質が存在するとする。即ち、

$$A9 \quad \exists u \neg SET(u)$$

また、任意の性質 u に対して、それと外延が等しい集合 α が存在するとする。

$$A10 \quad \forall u \exists \alpha (u \equiv \alpha)$$

定義より、 $\forall u \triangle SET(u)$ となる。また、任意の α に対して $\forall x \triangle x \in \alpha$ である。それ故、式 Φ が SET(u)、 $x \in \alpha$ 、 $x = y$ という形の式から、論理記号を用いて構成されるとき、あるいは定義によってそのような式と論理的に等値となるとき、 Φ は論理的、即ち、 $\triangle \Phi$ となる。通常 Z F で用いられる式 Φ は、上記のようにして構成される。従って、Z F の式 Φ は論理的である。

§ 1 の D 7 ~ D 18 の定義は、変項 u, v が集合を表していると解釈するならば、Z F のそれらと同じものとなる（この場合、 $\triangle (v \subseteq u)$ だから、D 16 の $\square$ はあってもなくても同じである）。それ故、集合のみが問題とされているときは、D 7 ~ D 16 で定義された表現は、Z F のそれと同じものとして扱うことができる。また、D 17, D 18 の関係、関数も

Z Fにおけるそれらと同じものとなる．以下では特に断らない限り，関係，関数と呼ばれるものは，集合であるとする．

先にも述べたように，M Z FにおいてはZ Fの公理をすべて証明することができる．まず，集合 α ， β に対しては， $(\alpha \equiv \beta) \Leftrightarrow \Box (\alpha \equiv \beta)$ となる．それ故，A 1より，

$$T 1 \quad (\alpha \equiv \beta) \rightarrow \alpha = \beta$$

即ち，Z Fの外延性の公理が成り立つ．

§ 1のA 2より，任意の α と式 $\Phi(x)$ に対して， $\forall x [x \in v \Leftrightarrow \{x \in \alpha \wedge \Phi(x)\}]$ となる v が存在するが，このような v に対してはA 10より， $v \equiv \beta$ となる集合 β が存在する．それ故，Z Fの部分集合の公理が成り立つ．即ち，

$$T 2 \quad \exists \beta \forall x [x \in \beta \equiv \{x \in \alpha \wedge \Phi(x)\}]$$

同様に，Z Fの他の公理も証明される．従って，M Z FはZ Fを部分体系として含んでいる．以下では，§ 1のD 6で定義された性質 $[x : \Phi(x)]$ が集合となるときの，これをZ Fと同様 $\{x : \Phi(x)\}$ と表す．また，上で述べたもの以外でも，集合に関してZ Fにおけると同様に種々の定義がなされているとする．

§ 3 事態

“事態”というのは，文の意味あるいは内包とされ，「…ということ」といわれているものである．ここでは集合の場合と同様，このような事態を性質の特殊なものとする．つまり，事態 x は， x を有するものが必ず0であるような性質と考える．即ち，“性質 x は事態である”ということを， $\text{PROP}(x)$ と表し，次のように定義する．

$$D 1 \quad \text{PROP}(x) \equiv_{df} \Box \forall y (y \in x \rightarrow y = 0)$$

§ 1のD 4，D 12より， $\text{PROP}(x) \equiv \Box (x \subseteq 1)$ である．従って，§ 1のD 16より， $P_w(1)$ は事態全体の集合である．以下では，変項 p ， q ， r でこのような事態を表す．事態は真（あるいは事実）であったり，なかったりする．ここでは“ p が真である”ということとは， $0 \in p$ ということであるとする．以下では明らかな場合，特に結合記号と共に用いられる場合， $0 \in p$ の代わりに単に p とも記す．例えば， $\neg 0 \in p$ ， $\Box 0 \in p$ ， $0 \in p \Rightarrow 0 \in q$ の代わりにそれぞれ， $\neg p$ ， $\Box p$ ， $p \Rightarrow q$ と記す．そして，これらをそれぞれ，「 p でない」，「 p は必然的」，「 p は q を論理的に含意する」と読むことにする．このように規約をすれば，変項 p ， q ， r を式としても扱うことができる．以下で導入される事態を表す表現に関しても同様とする．なお， $p \equiv q$ の場合は， $\equiv$ を結合記号と解釈しても，外延の同一を表す記号と解釈しても，それらは論理的に等値となり，同じことである．これらの定義に従って，直観的に事態が満たすべきと考えられる次の二つの条件が証明される．

$$T 1 \quad (p \Leftrightarrow q) \equiv (p = q)$$

$$T 2 \quad \exists p (p \Leftrightarrow \Phi)$$

$\Box (0 \subseteq 1)$ ， $\Box (1 \subseteq 1)$ であるから， 0 ， 1 は事態である．さらに次の定理が成り立つ．

$$T 3 \quad p = 0 \equiv \neg \Diamond p$$

$$T 4 \quad p = 1 \equiv \Box p$$

それ故， 0 は（真であることが）不可能な唯一の事態であり， 1 は必然的な唯一の事態である．

T 1，T 2より，任意の文 Φ に対して， $p \Leftrightarrow \Phi$ となる p は唯一つ存在する．このような

p を“ Φ という事態”といい, $[\Phi]$ と表す.

$$D2 \quad [\Phi] = p \equiv_{df} p \Leftrightarrow \Phi$$

事態の集合, 即ち $\alpha \subseteq Pw(1)$ となる α に対して, $\Sigma \alpha$, $\Pi \alpha$ をそれぞれ“ α の論理和”, “ α の論理積”といい, 次のように定義する (以下, この節の定理における α は, すべて事態の集合とする).

$$D3 \quad \Sigma \alpha =_{df} [\exists p (p \wedge p \in \alpha)]$$

$$D4 \quad \Pi \alpha =_{df} [\forall p (p \in \alpha \rightarrow p)]$$

$\alpha = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ である集合 α に対しては, $\exists p (p \wedge p \in \alpha) \Leftrightarrow (p_0 \vee p_1 \vee \dots \vee p_n)$ となる. 従って $D3$ より, $\Sigma \alpha = [p_0 \vee p_1 \vee \dots \vee p_n]$ となる. それ故, α の論理和は, いわば α に属するすべての事態の選言である. このことは, α が無限集合の場合にも言える. 同様に, 上のような集合 α に対しては, $\forall p (p \in \alpha \rightarrow p) \Leftrightarrow (p_0 \wedge p_1 \wedge \dots \wedge p_n)$ である. 従って, $D4$ より, $\Pi \alpha = [p_0 \wedge p_1 \wedge \dots \wedge p_n]$ となる. それ故, α の論理積は, いわば α に属するすべての事態の連言である. なお, $\alpha = 0$ のときは, $\neg \Diamond \exists p (p \wedge p \in \alpha)$ であるから, $\Sigma \alpha = 0$ となる. また, $\Box \forall p (p \in \alpha \rightarrow p)$ であるから, $\Pi \alpha = 1$ となる. さらに, 次の定理が成り立つ.

$$T5 \quad p \in \alpha \rightarrow (p \Rightarrow \Sigma \alpha)$$

$$T6 \quad p \in \alpha \rightarrow (\Pi \alpha \Rightarrow p)$$

$$T7 \quad \alpha \subseteq \beta \rightarrow (\Sigma \alpha \subseteq \Sigma \beta)$$

$$T8 \quad \alpha \subseteq \beta \rightarrow (\Pi \beta \subseteq \Pi \alpha)$$

$$T9 \quad \forall q \{q \in \alpha \rightarrow (q \Rightarrow p)\} \equiv (\Sigma \alpha \Rightarrow p)$$

$$T10 \quad \forall q \{q \in \alpha \rightarrow (p \Rightarrow q)\} \equiv (p \Rightarrow \Pi \alpha)$$

§ 4 可能世界

$\forall q \{q \equiv (p \Rightarrow q)\}$ が事実となるような p , つまり, すべての事実を, そして事実のみを論理的に含意するような p を“現実の世界(actual world)”といい, $AW(p)$ と表す.

$$D1 \quad AW(p) \equiv_{df} \forall q \{q \equiv (p \Rightarrow q)\}$$

MZFにおいてはこのような現実の世界がただ一つ存在することが証明される.

さらに, $\Diamond AW(p)$ となる p を“可能世界(possible world)”という. 以下ではこのような可能世界を w 及び u で表す. 可能世界 w と事態 p に対して, $w \Rightarrow p$ (即ち, $0 \in w \Rightarrow 0 \in p$) となると, “ p は w において真である (あるいは事実である)”という. このように可能世界における真という概念を定義すれば, 通常の可能世界意味論における定義や定理がすべて証明される. 例えば,

$$T1 \quad (w \Rightarrow \neg p) \equiv \neg (w \Rightarrow p)$$

$$T2 \quad \{w \Rightarrow (p \wedge q)\} \equiv \{(w \Rightarrow p) \wedge (w \Rightarrow q)\}$$

$$T3 \quad \{w \Rightarrow (p \vee q)\} \equiv \{(w \Rightarrow p) \vee (w \Rightarrow q)\}$$

$$T4 \quad \{w \Rightarrow (p \rightarrow q)\} \equiv \{(w \Rightarrow p) \rightarrow (w \Rightarrow q)\}$$

$$T5 \quad \{w \Rightarrow (p \equiv q)\} \equiv \{(w \Rightarrow p) \equiv (w \Rightarrow q)\}$$

$$T6 \quad \{w \Rightarrow \forall x \phi(x)\} \equiv \forall x \{w \Rightarrow \phi(x)\}$$

$$T7 \quad \{w \Rightarrow \exists x \phi(x)\} \equiv \exists x \{w \Rightarrow \phi(x)\}$$

$$T 8 \quad (w \Rightarrow \Box p) \equiv \forall u (u \Rightarrow p)$$

$$T 9 \quad (w \Rightarrow \Diamond p) \equiv \exists u (u \Rightarrow p)$$

また、ライプニッツの主張に対応した、次のような定理も証明される。

$$T 10 \quad \Diamond w \text{ (即ち, } \Diamond 0 \in w)$$

$$T 11 \quad \Box p \equiv \forall w (w \Rightarrow p)$$

$$T 12 \quad \Diamond p \equiv \exists w (w \Rightarrow p)$$

さらに、次のような定理も証明される。

$$T 13 \quad p \equiv \exists w \{AW(w) \wedge (w \Rightarrow p)\}$$

§ 5 出来事

以下においては、ある世界、たとえば現実の世界 w を固定し、事態 p 等はこの世界のものとする。即ち、 $w \Rightarrow p$ とする。事態の中で、(直観的に言って) ある連続した時空間の状態を“出来事(event)”という。たとえば、ある時間(間隔)における、ある部屋の中の状態は、一つの出来事として考えられる。その部屋の中の、椅子がある、人が話をしている、等のすべての出来事の連言が出来事である。このとき、出来事とその状態となっている時空間は、ある広がり、時空的延長をもったものであり、点のような存在ではない。ただし、それらは有限なものであり、無限の延長をもつということはない。

我々が通常、個体と呼ぶものは、このような出来事あるいはその連言として考えることができる。たとえば、ある人は、まさにその人が占めている時空間に起こっているすべての事態に等しいと考えられる。このように個体は“もの”というより“こと”である。もちろん、すべての出来事が個体とは呼ばれないだろう。そのためには何らかの条件が必要と思われる。しかし、ここでは個体の条件についてはこれ以上論じないことにする。以下ではこのような出来事から時間、空間を構成する。

上では出来事について直観的に述べたが、正確には出来事は、以下に述べる種々の条件を満たす事態であり、逆にそのような条件をみたすならば、どのようなものであってもかまわない。たとえば、それは物理的なものであっても、心理的なものであってもかまわない。まず、出来事は必然的でも、不可能でもない。即ち、1でも0でもない。また、どの出来事に対しても、それと互いに部分とならないようなある出来事が存在するとする。以下では出来事の(空でない)集合を EVENT とする。そして、変項 e, f, g で出来事を表す。

通常、個体あるいは出来事に関しては、その部分が問題とされる。このような全体一部分関係というのは、外延的なそれ、つまり一つの世界内でのそれとして考えられることが多い。しかし、出来事 e, f に対して、 f が e の部分であるということは、外延のみを考えては解明されえないだろう。たとえば、ある人 e の体の中に寄生虫 f がいた場合、はたして f は e の部分といえるだろうか。 f が部分ではないとした場合、その理由はどのようなものであろうか。一つの世界のみを考えれば、 f は e の体の中にあるのだから、臓器のように明らかに e の部分といってよいものと区別がつかない。 f が部分でないというためには、 f がいなくなってもやはり e が存在する、つまり $e \wedge \neg f$ ということが真である世界が存在しなければならないだろう。即ち、 $\Diamond(e \wedge \neg f)$ でなければならない。逆に言えば、 f が e の部分であるためには $\neg \Diamond(e \wedge \neg f)$ 、即ち、 $e \Rightarrow f$ でなければならない。

そこで、ここでは e が f を部分とする、あるいは f は e の部分であるということは、 $e \Rightarrow f$ ということであるとする。さらに、出来事だけでなく一般の事態 p, q に対しても、 $p \Rightarrow q$ のとき、“ p は q を部分とする” あるいは “ q は p の部分である” という。§ 3 の T 1 より、 p と q が互いの部分のときは、 p と q は同一である。 q が p の部分であるが、その逆は言えないとき、“ p は q を真部分とする” という。また、このとき、“ p は q より大である” あるいは “ q は p より小である” ともいう。このように表現するとき、§ 3 の T 9 より、 $\Sigma \alpha$ は、 α に属するすべての事態と同一かそれより小さい事態のなかで最も大きいものである。同様に § 3 の T 10 より、 $\Pi \alpha$ は、 α に属するすべての事態と同一かそれより大きい事態のなかで最も小さいものである。なお、以下では $\Rightarrow$ の結合力は他の結合記号よりも強いとする。従って、たとえば $p \Rightarrow r \wedge q \Rightarrow r$ は $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ であるとする。また、 $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r$ を $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ と記す。さらに、事態 p, q が事態 r をともに部分としているとき、“ p, q は r を交差 (intersect) 部分” とするといひ、 $IS(p, q, r)$ と表す。また、 $IS(p, q, r)$ となる r が存在するとき、“ p, q は交差している” といひ、 $IS(p, q)$ と表す。

D 1 $IS(p, q, r) \equiv df \{ p \Rightarrow r \wedge q \Rightarrow r \}$

D 2 $IS(p, q) \equiv df \exists r IS(p, q, r)$

ここで前提されている世界 w は、やはり前提されている出来事をすべて部分として含むものである。つまり、 $\forall p (p \in \text{EVENT} \Rightarrow w \Rightarrow p)$ である。従って § 3 の T 10 より、 $w \Rightarrow \Pi \text{EVENT}$ となる。ここでは、この逆も成り立つとする。即ち、 $\Pi \text{EVENT} \Rightarrow w$ とする。つまり、すべての出来事の連言から w が論理的に導かれるとする。このとき当然、 $w = \Pi \text{EVENT}$ となる、つまり、世界 w はすべての出来事の連言となる。従って、もし最大の出来事 e があれば、それは w と一致することになる。

§ 6 抽象的集合

直観的に言って、ある点、線分、三角形、球、等の“幾何学的要素 (geometrical element)” は、それを含んでいる出来事全体の集合と一対一に対応していると考えられる。以下では、このような出来事の集合を“抽象的集合 (abstractive set)” という。ここでは抽象的集合を以下のような条件を満たす集合 α として定義する。

D 1 抽象的集合 α は次の条件を満たす、 $0 \neq \alpha \neq \text{EVENT}$ である出来事の集合である。

(i) $e \in \alpha \wedge f \in \alpha \rightarrow \exists g \{ IS(e, f, g) \wedge g \in \alpha \}$

(ii) $e \Rightarrow \Sigma \alpha \rightarrow e \in \alpha$

(i) より、 α に属する任意の 2 つの出来事は、 α に属する交差部分を含んでいる。§ 3 の T 5 より、任意の事態の集合 α に対して、 $e \in \alpha$ ならば $e \Rightarrow \Sigma \alpha$ となる。抽象的集合 α に対しては、この逆、即ち (ii) が成り立つとする。抽象的集合に対しては以下の定理が成り立つ (以下、T 1 ~ T 5 における α, β は抽象的集合とする)。まず、上で述べたことより、

T 1 $e \Rightarrow \Sigma \alpha \equiv e \in \alpha$

ここで $\Sigma \alpha \Rightarrow \Sigma \beta$ とする。さらに $e \in \alpha$ とする。このときは $e \Rightarrow \Sigma \alpha$ 。それ故、 $e \Rightarrow \Sigma \beta$ 。従って T 1 より、 $e \in \beta$ 。以上より、 $\forall e (e \in \alpha \rightarrow e \in \beta)$ 。即ち、 $\alpha \subseteq \beta$ となる。以上より、 $(\Sigma \alpha \Rightarrow \Sigma \beta) \rightarrow \alpha \subseteq \beta$ 。これと § 3 の T 7 より、次の定理が成り立つ。

$$T2 \quad (\Sigma \alpha \Rightarrow \Sigma \beta) \equiv \alpha \subseteq \beta$$

T2より、次の定理が成り立つ。

$$T3 \quad (\Sigma \alpha = \Sigma \beta) \equiv \alpha = \beta$$

なお、上ではT1からT2を導いたが、逆にT2からT1を導くことができる。実際、T2において $\alpha = \{e\}$ とすれば、 $(\Sigma \{e\} \Rightarrow \Sigma \beta) \equiv \{e\} \subseteq \beta$ となるが、 $\Sigma \{e\} = e$ 、 $\{e\} \subseteq \beta \equiv e \in \beta$ であるから、 $e \Rightarrow \Sigma \beta \equiv e \in \beta$ となり、T1が成り立つ。それ故、T1、T2及びD1の(ii)はすべて等値である。

抽象的集合 α と出来事 e に対して、 e の部分であつて α に属するもの全体の集合を“ α の(e に)限定された抽象的集合”といい、 α / e と表す。即ち、

$$D2 \quad \alpha / e =_{df} \{f : e \Rightarrow f \wedge f \in \alpha\}$$

$$T4 \quad e \in \alpha \rightarrow \Sigma \alpha = \Sigma \alpha / e$$

証明 $e \in \alpha$ とする。まず、 $\alpha / e \subseteq \alpha$ であるから、

$$\Sigma \alpha / e \Rightarrow \Sigma \alpha \cdots ①$$

次に、 $f \in \alpha$ とする。このとき、 $e \in \alpha$ 及びD1の(i)より、

$$IS(e, f, g) \wedge g \in \alpha \cdots ②$$

となる g が存在する。このような g に対しては、 $e \Rightarrow g \wedge g \in \alpha$ だから、 $g \in \alpha / e$ 。従つて、 $g \Rightarrow \Sigma \alpha / e$ 。また、②より $f \Rightarrow g$ だから、 $f \Rightarrow \Sigma \alpha / e$ 。以上より、

$$\forall f (f \in \alpha \rightarrow f \Rightarrow \Sigma \alpha / e)$$

それ故、§3のT9より、 $\Sigma \alpha \Rightarrow \Sigma \alpha / e$ 。従つて①より、 $\Sigma \alpha = \Sigma \alpha / e$ となる。以上より、定理が成り立つ。

T4より、 $e \in \alpha$ のときは、抽象的集合 α のかわりに α / e を考えることもできる。

D1の(i)より、抽象的集合 α に属する e は、 α に属するすべて出来事と α に属する交差部分を有する。即ち、次のことが成り立つ。

$$\forall f [f \in \alpha \rightarrow \exists g \{IS(e, f, g) \wedge g \in \alpha\}] \cdots ①$$

逆に、①を満たすような e は、すべて α に属するということがいえる。つまり、次の定理が成り立つ。

$$T5 \quad \alpha = \{e : \forall f [f \in \alpha \rightarrow \exists g \{IS(e, f, g) \wedge g \in \alpha\}]\}$$

証明 抽象的集合 α 及び e に対して、上の①を仮定する。このとき、抽象的集合の定義より $\alpha \neq 0$ であるから、 $f \in \alpha$ となる f が存在する。このような f に対しては、①より $IS(e, f, g)$ 、つまり $e \Rightarrow g \wedge f \Rightarrow g$ となる α の元 g が存在する。このような g に対しては、 $g \in \alpha$ より $g \Rightarrow \Sigma \alpha$ 。従つて $e \Rightarrow g$ より、 $e \Rightarrow \Sigma \alpha$ 。従つてD1の(ii)より、 $e \in \alpha$ 。以上より、①ならば $e \in \alpha$ となる。それ故、定理が成り立つ。

T5は、抽象的集合はいわば交差部分を含む出来事をすべて集めたもの、つまり、交差部分を含む出来事の極大集合であることを表している。それ故、D1で定義した抽象的集合は、この節の最初で述べた、直観的な意味での幾何学的要素と一対一に対応している集合とみなすことができる。それ故、逆に改めてこのような抽象的集合を一つの幾何学的要素として定義することができる。しかし、ここでは抽象的集合ではなく、それに属するすべての出来事の選言を幾何学的要素とする。つまり、 α が抽象的集合のとき、 $\Sigma \alpha$ という事態を一つの幾何学的要素として定義する。実際、T3より、このような幾何学的要素と抽象的集合は一対一に対応している。⁽²⁾

幾何学的要素は1でも0でもない．実際，抽象的集合 α に対して， $\Sigma \alpha = 1$ とすれば，§3のT4より $\forall e (e \Rightarrow \Sigma \alpha)$ となる．従って，D1の(ii)より $\forall e (e \in \alpha)$ となり， α は出来事全体の集合になる，即ち， $\alpha = \text{EVENT}$ となる．しかし，これは抽象的集合の定義に反する．同様に，抽象的集合の定義より $\alpha \neq 0$ であるから， $e \in \alpha$ となる e が存在する．このような e に対しては， $e \Rightarrow \Sigma \alpha \wedge e \neq 0$ であるから，§3のT3より $\Sigma \alpha = 0$ ではない．また，抽象的集合 α に属する出来事は，ここで前提している世界 w において真であるから， $\Sigma \alpha$ も w において真である．従って，幾何学的要素は w の部分である．

出来事も幾何学的要素となる．実際，出来事 g に対して， $\{e : e \Rightarrow g\}$ という集合を α とする．どの出来事に対してもそれと互いに部分とならないような出来事が存在したから， g に対しても $e \Rightarrow g$ とならない e が存在し，従って e は α に属さない．それ故， $\alpha \neq \text{EVENT}$ である．また， $g \Rightarrow g$ であるから， $g \in \alpha$ ．それ故， $\alpha \neq 0$ である．さらに，明らかに α はD1の(i)を満たす．また， $\forall e (e \in \alpha \rightarrow e \Rightarrow g)$ だから，§3のT9より， $\Sigma \alpha \Rightarrow g \cdots \textcircled{1}$ ．ここで $e \Rightarrow \Sigma \alpha$ とすれば， $\textcircled{1}$ より $e \Rightarrow g$ ，従って $e \in \alpha$ ．それゆえ， $e \Rightarrow \Sigma \alpha \rightarrow e \in \alpha$ ．即ち α はD1の(ii)を満たし，従って抽象的集合である．さらに， $g \in \alpha$ より $g \Rightarrow \Sigma \alpha$ ．従って $\textcircled{1}$ より， $g = \Sigma \alpha$ ．それ故，出来事 g は幾何学的要素でもある．もちろん，出来事以外の幾何学的要素も存在する．以下に述べるような，点とか線分等の広がりをもたないもの，あるいは直角二等辺三角形のように無理数によって表される長さをもつ対象は，すべて出来事以外の幾何学的要素である．

以下では，幾何学的要素を変項 a, b, c で表し，その全体の集合をGEOELとする．EVENTは空でなかったから，GEOELも空ではない．また， $a = \Sigma \alpha$ となる抽象的集合 α を，“ a と連合した抽象的集合”という．幾何学的要素 a に対して $\alpha = \{e : e \Rightarrow a\}$ とする．このとき， a と連合した抽象的集合を β とすれば，即ち $a = \Sigma \beta$ とすれば， $e \Rightarrow a \equiv e \Rightarrow \Sigma \beta \equiv e \in \beta$ であるから， $\alpha = \beta$ となる．従って，次の定理が成り立つ．

T6 α は a と連合した抽象的集合である $\equiv \alpha = \{e : e \Rightarrow a\}$

T6及びD1の(i)より，次の定理が成り立つ．

T7 $\text{IS}(e, f, a) \equiv \exists g \{ \text{IS}(e, f, g) \wedge g \Rightarrow a \}$

ここで $\forall e (e \Rightarrow a \rightarrow e \Rightarrow b)$ とする．このときT6より， a と連合した抽象的集合 α に対しては， $\forall e (e \in \alpha \rightarrow e \Rightarrow b)$ ．従って， $\Sigma \alpha \Rightarrow b$ ，つまり $a \Rightarrow b$ である．それ故，以下の定理が成り立つ．

T8 $a \Rightarrow b \equiv \forall e (e \Rightarrow a \rightarrow e \Rightarrow b)$

T9 $a = b \equiv \forall e (e \Rightarrow a \equiv e \Rightarrow b)$

§7 時空点

幾何学的要素の中で以下の条件を満たすものを“時空点 (space-time point)”とする．以下では時空点全体の集合をSTPとし，変項 x, y, z で時空点を表す．また，時空点の集合を“場所”あるいは“場”という．そして，場 α に対して， $\Pi \alpha$ を“ α の状態”という．さらに，事態 p に対して， p の部分である時空点全体の集合を，“ p の占める場”と言い， $|p|$ と表す（ p は幾何学的要素でなくてもよいとする）．即ち，

D1 $|p| =_{\text{df}} \{x : p \Rightarrow x\}$

時空点は次の2つの条件を満たすものとする（以下ではこのような条件を一般に‘C’で

表す).

C 1 (i) α が場のとき, $\Pi \alpha \Rightarrow x \rightarrow x \in \alpha$

(ii) 幾何学的要素 a に対して, $\Pi | a | \Rightarrow a$

直観的に言って, 時空点はすべての幾何学的要素の中で極小のもの, 即ち, どんな幾何学的要素も真部分としないようなものである. つまり, 時空点 x は, $\forall a (x \Rightarrow a \rightarrow x = a)$ となるようなものである. ここではこのような条件を C 1 には含めないが, 後に述べるように, このことは C 1 から導かれる. C 1 の (i) (の対偶) の述べていることは, 任意の時空点は, 他のいくつかの時空点の連言に論理的に含意されないということである. (i) で $\alpha = \{y\}$ とすれば, $\Pi \alpha = y$ だから,

T 1 $y \Rightarrow x \rightarrow x = y$

さらに, C 1 の (i) より § 6 の T 1 ~ T 3 と同様にして, α, β が場のときは, 次の定理が証明される.

T 2 $\Pi \alpha \Rightarrow x \equiv x \in \alpha$

T 3 $\Pi \beta \Rightarrow \Pi \alpha \equiv \alpha \subseteq \beta$

T 4 $\Pi \beta = \Pi \alpha \equiv \alpha = \beta$

T 4 より, 場とその状態とは一対一に対応している.

D 1 より, $\forall x (x \in | a | \rightarrow a \Rightarrow x)$. 従って § 3 の T 10 より, $a \Rightarrow \Pi | a |$ となる. C 1 の (ii) はこの逆が成り立つことを述べている. それ故,

T 5 $a = \Pi | a |$

つまり, 幾何学的要素の占める場の状態は, その幾何学的要素自身である.

どのような幾何学的要素 a に対しても, $| a | = 0$ ではない. 実際, そうであれば, $\Pi | a | = 1$. すると, T 5 より $a = 1$ となるが, これは幾何学的要素の条件に反する. なお, このこと及び $\text{GEOEL} \neq 0$ より, 時空点は少なくとも一つ存在する, 即ち, $\text{STP} \neq 0$ になる.

先にも述べたように, 時空点はすべての幾何学的要素の中で極小のものとなる.

T 6 $(x \Rightarrow a) \rightarrow x = a$

証明 $x \Rightarrow a \cdots \textcircled{1}$ とする. 上にも述べたように $| a | = 0$ ではないから, $y \in | a |$ となる y が存在する. このような y に対しては, D 1 より, $a \Rightarrow y \cdots \textcircled{2}$ となる. ①, ②より, $x \Rightarrow y$ であるが, このときは T 1 より, $x = y$ となる. 従って②より, $a \Rightarrow x$. これと①より, $x = a$. それ故, 定理が成り立つ.

α が場のとき, D 1, T 2 より直ちに次の定理が成り立つ.

T 7 $| \Pi \alpha | = \alpha$

つまり, 場 α の状態の占める場は, α 自身である. さらに T 3 より, $\Pi | a | \Rightarrow \Pi | b | \equiv | b | \subseteq | a |$. 従って T 5 より, 次の定理が成り立つ.

T 8 $(a \Rightarrow b) \equiv | b | \subseteq | a |$

同様に T 4 より, あるいは T 8 より直ちに,

T 9 $a = b \equiv | a | = | b |$

§ 6 の T 7 において $a = x$ とすれば, D 1 より次の定理が成り立つ.

T 10 $x \in | e | \cap | f | \equiv \exists g \{ \text{IS}(e, f, g) \wedge x \in | g | \}$

T 10 及び, 任意の g に対して $| g | \neq 0$ となることより, 次の定理が成り立つ

$$T11 \quad |e| \cap |f| \neq 0 \equiv \exists g \text{ IS}(e, f, g)$$

時空点 x, y に対しては, $T1$ より, $x \neq y$ ならば $\neg(x \Rightarrow y)$. また, $x \Rightarrow \neg y$ ではない. 実際, そうであれば, ここで前提している世界 w に対して, $w \Rightarrow x$ だから, $w \Rightarrow \neg y$. 従って, $w \Rightarrow y$ より, $w \Rightarrow y \wedge \neg y$. しかし, このときは $\neg \Diamond w$ となり, 可能世界の条件に矛盾する. それ故,

$$T12 \quad x \neq y \rightarrow \{\neg(x \Rightarrow y) \wedge \neg(x \Rightarrow \neg y)\}$$

§5 の最後で述べたように, 世界 w はすべての出来事の連言である, 即ち, $w = \Pi \text{ EVENT}$ である. このことより容易に, w はすべての時空点の連言となることが証明される. 即ち,

$$T13 \quad w = \Pi \text{ STP}$$

ここでの時空点は, 前期ヴィトゲンシュタインの論理的原子論における“原子的事態 (Sachverhalt)”に相当していると解釈できる. 実際, 彼によれば, 原子的事態は互いに論理的に独立であり, また, 世界は原子的事態の総体 (連言) である. そして, まさに $T12, T13$ はこのことを表していると解釈できる.⁽³⁾

時空点以外の幾何学的要素, 例えば時空点 x, y を両端の点とする線分は, x, y を含む幾何学的要素のなかで極小のものとして定義される. しかし, ここではこのような幾何学的要素についてはこれ以上論じないことにする.

以下では, 上記のような条件を満たす4つの対象の組

$$\langle w, \text{EVENT}, \text{GEOEL}, \text{STP} \rangle$$

を“ w における相対的時空間の体系”といい. 一般に ST で表す. ただし, 明らかな場合は, 「 w における」, 「相対的」, 「体系」という表現を省略する. 今までは時空間の体系をいわば唯一絶対的なものとして扱ってきたが, 正確に言えば, これらは相対的なもので複数存在しうる. 実際, ある相対的時空間の体系 $ST = \langle w, \text{EVENT}, \text{GEOEL}, \text{STP} \rangle$ が与えられたとき, それをもとに新しい時空間の体系 $ST' = \langle w, \text{EVENT}', \text{GEOEL}', \text{STP}' \rangle$ を次のように構成できる. ここで STP のある分割 δ を考える. つまり, δ は STP の (空でない) 部分集合の集合で, 任意の時空点 x に対して, $x \in \alpha \wedge \alpha \in \delta$ となる α が唯一つ存在するようなものである. 従って, δ の任意の元 α, β に対しては, $\alpha \cap \beta = 0$ である. このとき, 以下に述べるように, $\alpha \in \delta$ となる α に対して, $\Pi \alpha$ が GEOEL の元であれば, これらを新しい時空点とみなすことができる. 以下この節においては, このような (ある分割 δ に基づいた) 新しい時空点を x', y' で表し, それらの集合を STP' とする. また STP' の部分集合を α' で表す. つまり, α' は新しい場である. このとき, 新しい時空点と場は, 上に述べた $C1(i)$ の条件を満たす. 即ち,

$$T14 \quad \Pi \alpha' \Rightarrow x' \rightarrow x' \in \alpha'$$

$$\text{証明} \quad \Pi \alpha' \Rightarrow x' \dots ①$$

とする. このとき,

$$x' = \Pi \alpha \wedge \alpha \in \delta \dots ②$$

となる α が存在する. このような α は空ではないから,

$$x \in \alpha \dots ③$$

となる x が存在する. ここで,

$$\cup \{ \beta : \beta \in \delta \wedge \Pi \beta \in \alpha' \} = \gamma \dots ④$$

とする. このような γ に対しては明らかに, $\forall \beta (\beta \in \delta \wedge \Pi \beta \in \alpha' \rightarrow \beta \subseteq \gamma)$, 従って,

$\forall \beta (\beta \in \delta \wedge \Pi \beta \in \alpha' \rightarrow \Pi \gamma \Rightarrow \Pi \beta)$. 従って $\forall y' (y' \in \alpha' \rightarrow \Pi \gamma \Rightarrow y')$. それ故,
 $\Pi \gamma \Rightarrow \Pi \alpha' \dots \textcircled{5}$

①, ⑤より, $\Pi \gamma \Rightarrow x'$. また②, ③より, $x' \Rightarrow x$. 従って, $\Pi \gamma \Rightarrow x$ であるが, ④より γ は場であるから, $x \in \gamma$. 従って,

$$x \in \beta \wedge \beta \in \delta \wedge \Pi \beta \in \alpha' \dots \textcircled{6}$$

となる β が存在する. ③, ⑥より, $x \in \alpha \cap \beta$, 従って $\alpha \cap \beta \neq 0$ である. それ故, α , β が STP の分割 δ の元であることから, $\alpha = \beta$ となる. 従って②より, $x' = \Pi \beta$. 従って⑥より, $x' \in \alpha'$. それ故, 定理が成り立つ.

従って, このような STP' に対して, C 1 (ii) を満たすように ST の EVENT, GEOEL を制限すれば, STP' は C 1 の条件を満たすことになる. それ故, このように制限された EVENT, GEOEL をそれぞれ EVENT', GEOEL' とし, $ST' = \langle w, EVENT', GEOEL', STP' \rangle$ とすれば, ST' は新しい時空間の体系となる. 以下で問題とされる時空間の体系というのは, このような相対的, 一般的なものであって, 上記のような条件を満たすものであればどのようなものでもよい.

§ 8 メレオロジー

全体－部分関係を公理化した体系にレスニエウスキーの“メレオロジー (mereology)”がある. 彼の体系は, ある対象とその集合, それらの間の帰属関係, 及び対象間の全体－部分関係を表す記号で記述される. ここではこれらの記号をそれぞれ, 変項 p, q, r , 変項 $\alpha, \in, \Rightarrow$ を用いて表すことにする. もちろん, 彼の体系は構文論的なものであるから, 必ずしもこれらを事態や論理的含意関係等を表していると解釈する必要はない.

まず, “ p は α の全体である” というものを $K(p, \alpha)$ と表し, 次のように定義する.

$$D1 \quad K(p, \alpha) \equiv df \quad \forall q (q \in \alpha \rightarrow p \Rightarrow q) \wedge \\ \forall r [p \Rightarrow r \rightarrow \exists q \{q \in \alpha \wedge IS(r, q)\}]$$

もちろん, $IS(r, q)$ は § 5 の D 2 で定義されたものである. メレオロジーは次の 5 つの公理を有している.⁽⁴⁾

$$A1 \quad p \Rightarrow p$$

$$A2 \quad p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p \rightarrow p = q$$

$$A3 \quad p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r \rightarrow p \Rightarrow r$$

$$A4 \quad \alpha \neq 0 \rightarrow \exists p K(p, \alpha)$$

$$A5 \quad K(p, \alpha) \wedge K(q, \alpha) \rightarrow p = q$$

このようなメレオロジーは, ある時空間の体系において解釈することが可能である. 即ち, 後者は前者のモデルになる. まず, 変項 p, q, r が (空ではない) 場の状態, また α がそれらの集合を表しているとする. さらに, $K(p, \alpha)$ が,

$$(i) \quad p = \Pi \cup \{|q| : q \in \alpha\}$$

を表しているとする. このとき, D 1 と 5 つの公理は, 以下に述べるようにすべて成り立つ. まず, ここでは変項の解釈に基づいて, $p = \Pi |p|$ としてよい. 場 α に対して $p = \Pi \alpha$ とすれば, § 7 の T 7 より $\Pi | \Pi \alpha | = \Pi \alpha$ だから, $\Pi |p| = p$ となるからである. それ故, § 7 の T 3 と同様に, $(p \Rightarrow q) \equiv |q| \subseteq |p|$ も成り立つ. このとき (i) は, $p = \Pi |p|$ より, $\Pi |p| = \Pi \cup \{|q| : q \in \alpha\}$ と等値であり, 従って, § 7 の T

4 より,

$$(ii) \quad |p| = \bigcup \{ |q| : q \in \alpha \}$$

と等値である. D 1 において, $K(p, \alpha)$ を (ii) で置き換え, また $p \Rightarrow q$ 等を $|q| \subseteq |p|$ 等で置き換え, さらに $|p|$ 等は 0 でないとすれば, D 1 は通常集合論において容易に証明される. さらに, A 1 から A 5 も直ちに成り立つ. このように, メレオロジーが成り立つということは, 全体-部分関係を論理的含意と解釈することの正当化を与えるものである.

§ 9 位相空間

ある時空間の体系が与えられたとき, いくつかの出来事の占める場の和集合を開集合とする“位相空間 (topological space)”を構成することができる. つまり, 出来事の占める場全体の集合を, “開いた基 (open base)”とする位相空間を構成できる.⁽⁵⁾ 以下ではこのことを証明する. なお, 上のような開集合 (とされたもの) を X, Y, Z で表す.

まず, 明らかに $STP = \bigcup \{ |e| : e \in \text{EVENT} \}$ であるから, STP は開集合である. 次に, α が開集合の集合のとき, 即ち, α に属する集合が, 出来事の占める場の集合 β の和集合 $\bigcup \beta$ であるときは, 直ちに次の定理が成り立つ.

$$T1 \quad \bigcup \alpha = \bigcup \{ |e| : \exists \beta (|e| \in \beta \wedge \bigcup \beta \in \alpha) \}$$

さらに, つぎの定理が成り立つ.

$$T2 \quad \exists Z (X \cap Y = Z)$$

$$\text{証明} \quad \bigcup \{ |g| : |g| \subseteq X \cap Y \} = Z \cdots \textcircled{1}$$

とする. また,

$$x \in X \cap Y \cdots \textcircled{2}$$

とする. このときは, $\exists \beta (x \in |e| \wedge X = \bigcup \beta \wedge |e| \in \beta)$ であり, 従って,

$$x \in |e| \wedge |e| \subseteq X \cdots \textcircled{3}$$

となる e が存在する. 同様に,

$$x \in |f| \wedge |f| \subseteq Y \cdots \textcircled{4}$$

となる f が存在する. このような e, f に対しては, § 7 の T10 より,

$$IS(e, f, g) \wedge x \in |g| \cdots \textcircled{5}$$

となる g が存在する. このような g に対しては, $IS(e, f, g)$ より, $|g| \subseteq |e|$ かつ $|g| \subseteq |f|$, それ故, ③, ④より, $|g| \subseteq X$ かつ $|g| \subseteq Y$, 従って, $|g| \subseteq X \cap Y$ となる. このこと及び⑤, ①より, $x \in Z$ となる. 以上より, ②ならば $x \in Z$. つまり, $X \cap Y \subseteq Z$ である. 逆に, ①より明らかに, $Z \subseteq X \cap Y$. 従って, $X \cap Y = Z$. それ故, 定理が成り立つ.

$$T3 \quad x \neq y \rightarrow \exists X (x \in X \wedge \neg y \in X) \vee \exists Y (y \in Y \wedge \neg x \in Y)$$

証明 $x \neq y$ とする. このときは, $\neg (x \Rightarrow y) \cdots \textcircled{1}$ あるいは $\neg (y \Rightarrow x) \cdots \textcircled{2}$ である. ここで①とする. このとき, § 6 の T8 より,

$$e \Rightarrow x \wedge \neg (e \Rightarrow y)$$

となる e が存在する. このような e に対しては, $x \in |e| \wedge \neg y \in |e|$ となるが, $|e|$ は開集合であるから,

$$\exists X (x \in X \wedge \neg y \in X)$$

となる．同様に，②とすれば， $\exists Y (y \in Y \wedge \neg x \in Y)$ となる．それ故，定理が成り立つ．

T 1 の=の右辺は，出来事の占める場の和集合である．従って，T 1 は開集合の集合の和は開集合であることを表している．また，T 2 は2つの開集合の積は開集合であることを表している．これらの定理は，位相空間が満たすべき2つの条件を示している．さらに，T 3 はここでの位相空間が T_0 -space であることを示している．このように，位相空間が構成されるということは，ここでの時空点の定義の正当化を与えるものであろう．

§ 10 出来事の時間的關係

ここでは新たに，時空間の体系に出来事の時間的前後関係 $<^T$ を導入する．即ち，“e は f より（時間的に）先である”ということをも $e <^T f$ とする（以下では明らかな場合，“ T ”を省略する）．このような $<^T$ は，順序対の“集合”であって， $e <^T f$ となる e と f は論理的に確定されるものとする． $<w, EVENT, GEOEL, STP, <^T>$ の4つの組を時間（の体系）という．以下ではこのような体系に基づいて時間を構成する．まず，次のように定義する．

$e < f$ でも $f < e$ でもないとき，“e と f は同時な（交差）部分をもつ”といい， $IS^T(e, f)$ と表す．

D 1 $IS^T(e, f) \equiv df \neg (e < f \vee f < e)$

出来事 e と f に対して，f のすべての部分が e のある部分と同時な部分をもつとき，“e は f を時間的部分とする”といい， $e \Rightarrow^T f$ と表す．

D 2 $e \Rightarrow^T f \equiv df \forall f' [f \Rightarrow f' \rightarrow \exists e' \{e \Rightarrow e' \wedge IS^T(f', e')\}]$

これらの定義に基づいて， $<$ は以下のような条件を満たすとする．

C 1 $<$ は順序関係である：

(i) 非対称的： $\neg e < e$

(ii) 移行的： $e < f \wedge f < g \rightarrow e < g$

C 2 e, f がそれぞれ e', f' を時間的部分とするととき，e が f より先であるならば， e' は f' より先である：

$e \Rightarrow^T e' \wedge f \Rightarrow^T f' \rightarrow (e < f \rightarrow e' < f')$

これらの定義，条件より，以下の定理が証明される．

T 1 $e \Rightarrow f \rightarrow e \Rightarrow^T f$

証明 $e \Rightarrow f$ とする．さらに $f \Rightarrow f'$ とする．このとき， $e \Rightarrow f'$ ．また，D 1, C 1 (i) より， $IS^T(f', f')$ である．従って， $e \Rightarrow f' \wedge IS^T(f', f')$ だから，

$\exists e' \{e \Rightarrow e' \wedge IS^T(f', e')\} \dots \textcircled{1}$

以上より， $\forall f' [f \Rightarrow f' \rightarrow \textcircled{1}]$ ．従って，D 2 より， $e \Rightarrow^T f$ ．それ故，定理が成り立つ．

T 1, C 2 より，

T 2 $e \Rightarrow e' \wedge f \Rightarrow f' \rightarrow (e < f \rightarrow e' < f')$

T 2 より， f' を f（あるいは e' を e）とすれば，

T 3 $e \Rightarrow e' \rightarrow (e < f \rightarrow e' < f)$

T 4 $f \Rightarrow f' \rightarrow (e < f \rightarrow e < f')$

T 5 $e \Rightarrow^T f \equiv \forall f' \{f \Rightarrow f' \rightarrow IS^T(f', e)\}$

証明 $e \Rightarrow^T f$ とする. さらに, $f \Rightarrow f'$ とする. このとき, D 2 より,

$$e \Rightarrow e' \dots \textcircled{1} \text{ 及び } IS^T(f', e') \dots \textcircled{2}$$

となる e' が存在する. このとき, $f' < e$ とすれば, $\textcircled{1}$, T 4 より, $f' < e'$. しかし, これは $\textcircled{2}$ に矛盾する. 従って,

$$\neg f' < e \dots \textcircled{3}$$

である. 同様に, $e < f'$ とすれば, $\textcircled{1}$, T 3 より, $e' < f'$ となり, $IS^T(f', e')$ に矛盾する. 従って, $\neg e < f'$. それ故, $\textcircled{3}$ より, $IS^T(f', e)$ となる. 以上より,

$$\forall f' \{ f \Rightarrow f' \rightarrow IS^T(f', e) \} \dots \textcircled{4}$$

逆に, $\textcircled{4}$ とする. さらに, $f \Rightarrow f'$ とする. このとき, $IS^T(f', e)$. 従って, $e \Rightarrow e \wedge IS^T(f', e)$ となるから,

$$\exists e' \{ e \Rightarrow e' \wedge IS^T(f', e') \} \dots \textcircled{5}$$

以上より, $\forall f' (f \Rightarrow f' \rightarrow \textcircled{5})$. 従って D 2 より, $e \Rightarrow^T f$ となる. それ故, 定理が成り立つ.

T 1, $e \Rightarrow e$ より,

$$T 6 \quad e \Rightarrow^T e$$

従って, C 2 より,

$$T 7 \quad e \Rightarrow^T e' \rightarrow (e < f \rightarrow e' < f)$$

$$T 8 \quad f \Rightarrow^T f' \rightarrow (e < f \rightarrow e < f')$$

$$T 9 \quad e \Rightarrow^T f \wedge f \Rightarrow^T g \rightarrow e \Rightarrow^T g$$

証明 $e \Rightarrow^T f \dots \textcircled{1}$ 及び $f \Rightarrow^T g \dots \textcircled{2}$

とする. また,

$$g \Rightarrow g' \dots \textcircled{3}$$

とする. さらに,

$$g' < e \dots \textcircled{4}$$

と仮定する. $\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$, T 8 より, $g' < f$. 従って, $\textcircled{2}$, T 8 より, $g' < g$. 従って, $\textcircled{3}$ より, $g' < g'$ となるが, これは C 1 (i) に矛盾する. それ故, $\textcircled{4}$ は成り立たない. 同様に, $e < g'$ も成り立たない. 従って, $IS^T(g', e)$ である. 以上より,

$$\forall g' \{ \textcircled{3} \rightarrow IS^T(g', e) \}$$

従って T 5 より, $e \Rightarrow^T g$ となる. それ故, 定理が成り立つ.

e と f が互いの時間的部分であるとき, “ e と f は同時である” といい, $e \Leftrightarrow^T f$ と表す.

$$D 3 \quad e \Leftrightarrow^T f \equiv df \quad e \Rightarrow^T f \wedge f \Rightarrow^T e$$

D 3, T 6, T 9 より明らかに, 次の定理が成り立つ.

$$T 10 \quad e \Leftrightarrow^T e$$

$$T 11 \quad e \Leftrightarrow^T f \rightarrow f \Leftrightarrow^T e$$

$$T 12 \quad e \Leftrightarrow^T f \wedge f \Leftrightarrow^T g \rightarrow e \Leftrightarrow^T g$$

T 10 ~ T 12 は, $\Leftrightarrow^T$ が同値関係であることを示している.

§ 11 幾何学的要素の時間的關係

上のような出来事間の時間的關係に基づいて, 幾何学的要素間のそれを次のように定義する. まず, “幾何学的要素 a は b よりも時間的に先である” ということを, $a <^{TA} b$ (あ

るいは‘ T ’を省略して $a <^A b$)と表す．そして、このことは、 a 、 b をそれぞれ部分とする出来事 e 、 f で、 e が f より先である e 、 f が存在するという事とする．即ち、

$$D1 \quad a <^A b \equiv df \exists e \exists f \{ e \Rightarrow a \wedge f \Rightarrow b \wedge e < f \}$$

定義より、以下の定理が証明される．

$$T1 \quad e < f \equiv e <^A f$$

証明 $e < f$ のときは、 $e \Rightarrow e \wedge f \Rightarrow f \wedge e < f$ であるから、

$$e' \Rightarrow e \wedge f' \Rightarrow f \wedge e' < f' \dots ①$$

となる e' 、 f' が存在することになる．従って、 $D1$ より、 $e <^A f$ となる．

逆に、 $e <^A f$ とすると、 $D1$ より①となる e' 、 f' が存在する．このときは、§10の $T2$ より、 $e < f$ となる．それ故、定理が成り立つ．

従って、 $<^A$ (正確には $<^{TA}$ を)は $<$ (正確には $<^T$ を)拡大したものとなっている．以下では、特に断らない限り、 $<$ と記されるのは $<^A$ であるとする．このように規約しても、 $T1$ より矛盾は生じない．

$$T2 \quad \neg a < a$$

証明 $a < a$ とする． $D1$ より、 $e \Rightarrow a \wedge f \Rightarrow a \wedge e < f$ となる e 、 f が存在する．このような e 、 f に対しては、 $IS(e, f, a)$ だから、§6の $T7$ より、 $IS(e, f, g)$ となる g が存在する．このとき、 $e \Rightarrow g$ 、 $f \Rightarrow g$ 、 $e < f$ だから $T2$ より、 $g < g$ となる．しかし、これは§10の $C1$ (i)に矛盾する．従って、 $a < a$ という仮定は成り立たない．即ち、定理が成り立つ．

$$T3 \quad a < b \wedge b < c \rightarrow a < c$$

証明 $a < b \wedge b < c$ とする．このときは $D1$ より、

$$e \Rightarrow a \wedge f \Rightarrow b \wedge e < f \dots ①$$

$$e' \Rightarrow b \wedge f' \Rightarrow c \wedge e' < f' \dots ②$$

となる e 、 f 、 e' 、 f' が存在する．このとき、 $IS(f, e', b)$ だから、

$$IS(f, e', g) \dots ③$$

となる g が存在する．このような g に対しては、§10の $T4$ より

$$f \Rightarrow g \rightarrow (e < f \rightarrow e < g)$$

従って、③、①より、 $e < g \dots ④$

となる．同様に、②、③より、 $g < f'$ となる．このこと及び④より、 $e < f'$ ．従って①、②より、 $(e \Rightarrow a) \wedge (f' \Rightarrow c) \wedge e < f'$ となる．それ故、 $D1$ より、 $a < c$ となる．以上より、定理が成り立つ、

$T3$ 、 $T4$ より、幾何学的要素間の関係 $<$ は、出来事間のそれと同様、順序関係になる．

以下に述べる2つの条件を満たすとき、“幾何学的要素 a は b を時間的部分とする”といい、 $a \Rightarrow^T b$ と表す．

$D2$

(i) a を部分とする任意の e に対して、 b を部分とする f で、 e の時間的部分となる f が存在する： $e \Rightarrow a \rightarrow \exists f (f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow^T f)$

(ii) a が時空点のときは、 b も時空点である

定義より、以下の定理が成り立つ．

$$T4 \quad e \Rightarrow^T f \equiv e \Rightarrow^{TA} f$$

証明 $e' \Rightarrow^T f' \dots ①$

とする. このとき, さらに, $e \Rightarrow e' \dots ②$

とする. ②, §10 の T 1 より, $e \Rightarrow^T e'$. 従って, ①, §10 の T 9 より, $e \Rightarrow^T f'$. 従って, $f' \Rightarrow f' \wedge e \Rightarrow^T f'$. 従って,

$\exists f (f \Rightarrow f' \wedge e \Rightarrow^T f) \dots ③$

以上より, (①の仮定のもとで) ② $\rightarrow$ ③. 即ち, D 2 (i) (で a, b にそれぞれ e' , f' を代入したもの) が成り立つ. それ故,

$e' \Rightarrow^{TA} f' \dots ③$ となる.

逆に, ③とする. このときは, D 2 (i) より,

$\forall e \{e \Rightarrow e' \rightarrow \exists f (f \Rightarrow f' \wedge e \Rightarrow^T f)\}$.

従って, $e' \Rightarrow e' \rightarrow \exists f (f \Rightarrow f' \wedge e' \Rightarrow^T f)$ となる. それ故, $e' \Rightarrow e'$ より, $f \Rightarrow f' \wedge e' \Rightarrow^T f$ となる f が存在する. このような f に対しては, §10 の T 1 より, $f \Rightarrow^T f' \wedge e' \Rightarrow^T f$. 従って, §10 の T 9 より, ①が成り立つ. それ故, 定理が成り立つ.

従って, $\Rightarrow^{TA}$ も $\Rightarrow^T$ を拡大したものである. 以下では, $<^A$ の場合と同様, $\Rightarrow^T$ と記されるのは, $\Rightarrow^{TA}$ であるとする.

T 5 $a \Rightarrow b \rightarrow a \Rightarrow^T b$

証明 $a \Rightarrow b \dots ①$ とする. さらに, $e \Rightarrow a \dots ②$ とする. ①, ②より, $e \Rightarrow b$ となる.

また, §10 の T 6 より, $e \Rightarrow^T e$. それ故, $e \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow^T e$, 従って,

$\exists f (f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow^T f) \dots ③$

以上より, (①の仮定のもとに) $\forall e (② \rightarrow ③)$. 即ち, D 2 (i) が成り立つ.

また, a が時空点のときは, ①より b の時空点となる. 従って, D 2 (ii) が成り立つ. , 以上より, D 2 が成り立ち, 従って $a \Rightarrow^T b$. それ故, 定理が成り立つ.

T 6 $a \Rightarrow^T b \wedge a' \Rightarrow^T b' \rightarrow (a < a' \rightarrow b < b')$

証明 $a \Rightarrow^T b \wedge a' \Rightarrow^T b' \dots ①$

とする. さらに, $a < a' \dots ②$

とする. ②, D 1 より,

$e \Rightarrow a \wedge e' \Rightarrow a' \wedge e < e' \dots ③$

となる e, e' が存在する. ①, ③より, $a \Rightarrow^T b, e \Rightarrow a$ だから, D 2 (i) より,

$f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow^T f \dots ④$

となる f が存在する. 同様に, ①, ③より, $a' \Rightarrow^T b', e' \Rightarrow a'$ だから,

$f' \Rightarrow b' \wedge e' \Rightarrow^T f' \dots ⑤$

となる f' が存在する. ③, ④, ⑤より, $e < e', e \Rightarrow^T f, e' \Rightarrow^T f'$ だから, §10 の C 2 より, $f < f'$. 従って, ④, ⑤より, $f \Rightarrow b \wedge f' \Rightarrow b' \wedge f < f'$ となる. それ故, $\exists f \exists f' (f \Rightarrow b \wedge f' \Rightarrow b' \wedge f < f')$. 従って, D 1 より, $b < b'$ である. 以上より, ① $\rightarrow$ (② $\rightarrow b < b'$), 即ち, 定理が成り立つ.

$e \Rightarrow a \rightarrow (e \Rightarrow a \wedge e \Rightarrow^T e)$ だから, $e \Rightarrow a \rightarrow \exists f (f \Rightarrow a \wedge e \Rightarrow^T f)$. 従って, D 2 より直ちに次の定理が成り立つ.

T 7 $a \Rightarrow^T a$

T 8 $a \Rightarrow^T b \wedge b \Rightarrow^T c \rightarrow a \Rightarrow^T c$

証明 $a \Rightarrow^T b \wedge b \Rightarrow^T c \dots ①$

とする。さらに、 $e \Rightarrow a \cdots ②$

とする。①より $a \Rightarrow^T b$ だから、②、D 2 より、

$$f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow^T f \cdots ③$$

となる f が存在する。①、③より、 $b \Rightarrow^T c$ 、 $f \Rightarrow b$ だから、

$$g \Rightarrow c \wedge f \Rightarrow^T g \cdots ④$$

となる g が存在する。③、④より、 $e \Rightarrow^T f$ 、 $f \Rightarrow^T g$ だから、§ 10 の T 9 より、 $e \Rightarrow^T g$ 。
従って④より、 $g \Rightarrow c \wedge e \Rightarrow^T g$ 、それ故、 $\exists g (g \Rightarrow c \wedge e \Rightarrow^T g) \cdots ⑤$ 。以上より、(①
の仮定のもと) $\forall e (② \rightarrow ⑤)$ 。即ち、D 2 (i) が成り立つ。

また、 a が時空点のときは、①より b と c も時空点となる。従って、D 2 (ii) が成り
立つ。以上より、D 2 が成り立ち、従って $a \Rightarrow^T c$ 。それ故、定理が成り立つ。

“幾何学的要素 a は b と同時である”ということを $a \Leftrightarrow^{TA} b$ とし、次のように定義する。

$$D 3 \quad a \Leftrightarrow^{TA} b \equiv df a \Rightarrow^{TA} b \wedge b \Rightarrow^{TA} a$$

D 3、T 4 より、次の定理が成り立つ。

$$T 9 \quad e \Leftrightarrow^T f \equiv e \Leftrightarrow^{TA} f$$

従って、 $\Leftrightarrow^{TA}$ も $\Leftrightarrow^T$ を拡大したものである。以下では、 $\Rightarrow^{TA}$ の場合と同様、 $\Leftrightarrow^{TA}$ を $\Leftrightarrow^T$ と
記す。さらに、D 3、T 6 ~ T 8 より、次の定理が成り立つ。

$$T 10 \quad a \Leftrightarrow^T b \wedge a' \Leftrightarrow^T b' \rightarrow (a < a' \rightarrow b < b')$$

$$T 11 \quad a \Leftrightarrow^T a$$

$$T 12 \quad a \Leftrightarrow^T b \rightarrow b \Leftrightarrow^T a$$

$$T 13 \quad a \Leftrightarrow^T b \wedge b \Leftrightarrow^T c \rightarrow a \Leftrightarrow^T c$$

なお、上に述べた T 5 の逆はもちろん成り立たない。しかし、§ 10 の T 1 の逆を仮定す
れば、それは成り立つ。即ち、

$$T 14 \quad \forall e \forall f (e \Rightarrow^T f \rightarrow e \Rightarrow f) \rightarrow (a \Rightarrow^T b \rightarrow a \Rightarrow b)$$

$$\text{証明} \quad \forall e \forall f (e \Rightarrow^T f \rightarrow e \Rightarrow f) \cdots ①$$

とする。また、 $a \Rightarrow^T b \cdots ②$

とする。②、D 2 (i) より、 $\forall e \{e \Rightarrow a \rightarrow \exists f (f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow^T f)\} \cdots ③$

①より、③の $\Rightarrow^T$ は $\Rightarrow$ によって置き換えることができる。即ち、

$$\forall e \{e \Rightarrow a \rightarrow \exists f (f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow f)\} \cdots ④$$

ここで、(任意の e に対して) $e \Rightarrow a \cdots ⑤$

とする。④、⑤より、 $f \Rightarrow b \wedge e \Rightarrow f$ となる f が存在する。従って、 $e \Rightarrow b$ である。それ
故、 $\forall e (⑤ \rightarrow e \Rightarrow b)$ 。従って、§ 6 の T 8 より、 $a \Rightarrow b$ 。それ故、定理が成り立つ。

T 14、T 5、§ 10 の T 1 より、次の定理が成り立つ。

$$T 15 \quad \forall e \forall f (e \Rightarrow^T f \equiv e \Rightarrow f) \equiv \forall a \forall b (a \Rightarrow^T b \equiv a \Rightarrow b)$$

§ 12 時間、空間

幾何学的要素 a 対して、 a と同時な幾何学的要素全体の集合を $[a]^T$ と表す(以下明ら
かな場合 ‘ T ’ を省略する)。

$$D 1 \quad [a]^T = df \{b : a \Leftrightarrow^T b\}$$

前節 D 2 の (ii) より、時空点 x に関しては、 $x \Leftrightarrow^T b$ となる b は時空点であるから、D 1
より、次の定理が成り立つ。

$$T1 \quad [x]^T = \{y : x \Leftrightarrow^T y\}$$

前節 T11～T13 より, $\Leftrightarrow^T$ は同値関係であるから, 次の定理が成り立つ.

$$T2 \quad [a] = [b] \equiv a \Leftrightarrow^T b$$

$[a]$ は “ a の (占めるあるいは持続する) 時間” と考えることができる. しかし, ここでは $[a]$ のかわりに, その論理積 $\Pi [a]$ を上記のような時間とし, a^T と表す.

$$D2 \quad a^T =_{df} \Pi [a]$$

そして, 次のことが成り立つとする.

$$C1 \quad a^T \Rightarrow b^T \equiv a \Rightarrow^T b$$

C1, T2 より, 以下の定理が成り立つ.

$$T3 \quad a^T = b^T \equiv a \Leftrightarrow^T b$$

$$T4 \quad a^T = b^T \equiv [a] = [b]$$

T4 は $[a]$ のかわりに a^T を a の時間とすることができることを示している. ある幾何学的要素の時間を単に時間という.

時間 a^T が b^T より先であるということを, $a^T < b^T$ と表し, 次のように定義する ($<$ は出来事に対しても用いられたが, 両辺の記号からそれらの違いは明らかであろう).

$$D3 \quad a^T < b^T \equiv_{df} a < b$$

T3, 前節の T10 より明らかに, この定義は a, b に相対的でなく, 一義的に定まる.

また, “ a^T が b^T を時間的部分とする”, “ a^T と b^T が同時である” ということをそれぞれ, $a^T \Rightarrow^T b^T$, $a^T \Leftrightarrow^T b^T$ と表し, 次のように定義する

$$D4 \quad a^T \Rightarrow^T b^T \equiv_{df} a \Rightarrow^T b$$

$$D5 \quad a^T \Leftrightarrow^T b^T \equiv_{df} a \Leftrightarrow^T b$$

これらの定義及び C1, T3 より, 以下の定理が成り立つ.

$$T5 \quad a^T \Rightarrow^T b^T \equiv a^T \Rightarrow b^T$$

$$T6 \quad a^T \Leftrightarrow^T b^T \equiv a^T = b^T$$

これらの定理は, 時間に関しては, 時間的部分と時間的同一性が論理的なそれらと一致することを示している.

D3 及び §11 の T2, T3 より, 以下の定理が成り立つ.

$$T7 \quad \neg a^T < a^T$$

$$T8 \quad a^T < b^T \wedge b^T < c^T \rightarrow a^T < c^T$$

さらに, 前節の T6～T13 (ただし T9 を除く) に対応した定理も成り立つ.

今までは時間を問題にしてきたが, 同様な方法によって空間も構成できる. 即ち, (出来事間の) 時間的前後関係 $<^T$ に対応した空間的な関係を考え, これを $<^S$ とする. このようなく $<^S$ に対しても, §10 の C1, C2 が成り立つとする. すると, 上で述べたのとまったく同じやり方で, 幾何学的要素に対する $\Rightarrow^S$, $\Leftrightarrow^S$, $[a]^S$ が定義できる. このとき, $\Pi [a]^S$ を “($<^S$ に関する) a の (占める) 空間” という.

さらに一般に, ある自然数 n に対して, $<^i$ ($1 \leq i \leq n$) という n 個の関係の組を考え, これらに対しても C1, C2 が成り立つとし, 同様に $\Rightarrow^i$, $\Leftrightarrow^i$, $[a]^i$ を定義する (上に述べた $<^T$, $<^S$ は $<^i$ のどれかと考える). このとき, $[a]^i$ を “($<^i$ に関する) a の時空間” という.

ここで, 新たに時空間の体系を次のようなものとして拡大する.

$\langle w, \text{EVENT}, \text{GEOEL}, \text{STP}, \langle^1, \langle^2, \dots \langle^n \rangle$

これらの時空間は、ある出来事の集合に対して定まるものと考え、このような集合を“基準系”という。これは物理学でいうそれに対応している。基準系は元が唯一つであってもかまわない。基準系に対して定まる時空間を、その“基準系に対応する時空間”という。もちろん、このとき基準系は、それに対応する時空間の出来事の部分集合である。同じ基準系に対応する時空間は、複数存在しうる。実際、それらにおける $\langle^i$ の取り方は、様々なものが考えられる。たとえば、時間に関していえば、光速度を無限あるいは有限いずれと考えると、それに対応した $\langle^T$ を取ることは可能であろう。もちろん、それに従って同時である e と f 、即ち、 $e \Leftrightarrow^T f$ となる e と f は異なってくる。

時空間 ST の任意の時空点 x に対して、

$$D6 \quad \cap \{ [x]^i : 1 \leq i \leq n \} = \{ x \}$$

となるとき、 ST は n 次元であるという。時空間が n 次元のときは、時空点 x とそれが有する（即ち、それが属する） n 個の場の組、

$$\langle [x]^1, [x]^2, \dots, [x]^n \rangle$$

は一対一に対応している。

先にも述べたように、幾何学的要素や時空点は、時空間の体系に相対的である。一般に幾何学的要素 a が小さくなればなるほど、時空間が n 次元になるための n は大きくなると考えられる。 a が小さくなればなるほど、集合 $[a]^i$ の元は多くなるからである。従って、現代の物理学で考えられているように、あるレベルの幾何学的要素に対しては、時空間は 4 次元であるが、よりミクロなレベルではそれより多くの次元をもつこともありうる。

先に時間に関して述べた、 e^T 、 a^T 、 x^T をそれぞれ出来事、幾何学的要素、時空点とし、 $D3$ で定義された（出来事に限定された） $\langle$ を時間的前後関係とみなせば、それらは 1 次元時空間 ST を構成すると考えることができよう（このとき、 $D3 \sim D4$ で定義された、時間に関する前後関係等は、 ST に関して §11 の $D1 \sim D3$ で定義されるそれらと一致すると考える）。実際、 $T1$ より、 $[x]$ は時空点の $\Leftrightarrow^T$ に関する同値類であり、それらの集合は時空点の分割になっている。従って、§6 の最後で述べたように、 x^T は新たな時空点となりうる。また、 $T6$ より $x^T \Leftrightarrow^T y^T \equiv x^T = y^T$ だから、このような $\Leftrightarrow^T$ に基づく $[x^T]$ に対しては、 $[x^T] = \{ x^T \}$ となる。それ故、 ST は 1 次元である。ここでは時間のみでなく、どのような関係 $\langle^i$ に対しても、上記のように構成される対象は 1 次元時空間であるとする。

最初に述べたように、上記のような相対的時空間から絶対的時空間が論理的に構成され、哲学的問題の解決が計られるが、そのような構成や解決は他の論文に譲ることとする。

注

- (1) MZF に関しては文献 [1]、第Ⅱ部、第3章を参照。
- (2) ホワイトヘッドは、文献 [2]、[3]、[4] において、同様に出来事 (event) から時空間の幾何学を構成している（ただし、[4] では「領域 (region)」という表現が用いられている）。ここでの構成も基本的には彼の考えを参考にしている。彼の構成と出来事とここでのそれとの大きな違いは、前者が出来事を外延的なものであるのに対して、後者は内包的なものであるという点である。また、彼は全体部分関係を定義されない原初的

(primitive)なものとしているが、ここでは論理的含意関係として定義している。さらに、彼は出来事には極小なものはないということを前提しているが、ここではそのようなことは前提していない。抽象的集合、幾何学的要素、等も彼の考えたそれらに対応しているが、これらは同じではない。これらの違いについてはここで詳しく述べる余裕がないので、上記の文献を参照されたい。ただ一つ述べるならば、T 5はラッセルが文献[5]において、ホワイトヘッドの幾何学的要素の定義として述べているものである（これは上記のホワイトヘッドの文献における定義とは、基本的な考え方は同じと言ってよいだろうが、実際の定式化ではかなり異なっている）。しかし、ここでは理論的な扱いを容易にするため、幾何学的要素を事態としてD 1のように定義した。

(3) 参考文献[6]における番号 2.05, 2.061 の命題は、このような考えを表しているとして解釈される。

(4) メレオロジーに関しては、文献[7] 参照。

(5) トポロジーの用語に関しては、文献[8] に従った。

参考文献

- [1] 永井成男, 和田和行著, 『哲学的論理学』, 北樹出版, 1997
- [2] A.N.Whitehead, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cosimo, 2007(first published 1919)
邦訳 藤川吉美訳, 『ホワイトヘッド著作集第3巻 自然認識の諸原理』, 松籟社, 1981
- [3] A.N.Whitehead, *The Concept of Nature*, Cosimo, 2007(First published 1920)
邦訳 藤川吉美訳, 『ホワイトヘッド著作集第4巻 自然という概念』, 松籟社, 1982
- [4] A.N.Whitehead, *Process and Reality*, The Free Press, 1979(First published 1929)
邦訳 山本誠作訳, ホワイトヘッド著作集第10・11巻, 『過程と実在(上・下)』, 松籟社, 1984-85
- [5] B.Russell, *Our Knowledge of the External World*, Routledge, 2006(First published 1914)
邦訳 石本 新訳, 『世界の名著 58 ラッセル, ウィットゲンシュタイン, ホワイトヘッド』, 中央公論社, 1971
- [6] L.Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge & Kegan Paul 1961(First published 1921)
- [7] S.Lesniewski, *S.Lesniewski's Lecture Notes in Logic*, Kleuer Academic Publishers, 1987
- [8] J.L. ケリー, 『位相空間論』, 児玉之宏訳, 吉岡書店, 1992 (原著 1955)

(日本大学准教授)