

メレオトポロジーの基礎について

齋藤 暢人

あらゆる概念のなかで、連続性の概念ほど哲学が取り扱いに困難を覚える概念はない。当然のことながら概念は定義されていなければ扱うことができない。しかし、わたしの意見では、連続性の定義についてはごく最近まで、およそ正しいものなどなにもなかったものであり、多少とも自分の意見を表明する能力のある人であれば、誰もがこの意見に同意するに違いない。
(パース、「連続性の論理」)

0. はじめに

本稿ではいわゆる「メレオロジーmereology」を前提して展開される理論の基礎的な性格を考察する。その理論とは、メレオロジー上において展開されるトポロジーである「メレオトポロジーmereotopology」である。すでに幾人もの研究者がこの理論の研究に携わり、研究成果を発表しているが、そもそもこの理論はどのように公理化され、定式化されるのであろうか。以下、先行研究を検討しながら筆者の考えを提示してゆくことにするが、具体的には、すでに提案された二つの代表的なメレオトポロジー的体系を採り上げ、これらの論理的等価性を示すことを主目的とする。

なお、本稿の原型となった考察は筆者の課程博士論文の一部をなしているが、その後の研究の結果、若干の不備が認められた。本稿は、そこで不十分に終わった考察を反省し、問題を根本的なところから再検討したものである¹。

1. 準備：古典的メレオロジーの体系

議論にはいる前に、メレオロジーの一般的な知名度が低いという事情を考慮して、その概要を紹介しておこう。メレオロジーとは、ポーランドの論理学者レスニエフスキによって提案された全体部分関係に関する形式的な理論のことであり、この耳慣れない名称も彼による（古典ギリシャ語からの造語である）。しかし、今日ではこれと論理的に等価な体系が、これらのヴァリエーションをも含めてメレオロジーと呼ばれる（なかでもよく知られているのは、レオナードとグッドマンによる「個体計算 Calculus of Individuals」であろう）。代表的な研究成果は比較的最近になって英国の哲学者・論理学者であるサイモンズによって集大成された²。こうした動きが機縁となって、今日では哲学・論理学・情報科学などさまざまな分野で便利なツールとして普及している。

メレオロジーは、空集合に相当する零元をもたないブール代数となることが知られている。メレオロジーの建設に携わった哲学者たちはおおむね唯名論者であり、彼らはこの事実を唯名論の形式的な表現と解釈してきた。つまり、これまでメレオロジーには（穏健な実念論の形式的な表現としての）集合論のオルタナティブとしての役割が期待されてきた

のである（ただし、以下で考察するメレオトポロジー的体系では $\sim U$ の存在から零元を認めることになるであろう。メレオトポロジーにおいては存在者の増加は避けられないようにおもわれる）³。

こうした事情から、メレオロジー自体の研究もさることながら、これに基づいた数学的理論を展開するという応用的な研究も盛んであり、メレオトポロジーはそうした動きのひとつである。これは、通常は集合論上で展開されるトポロジーを、メレオロジー上で展開しようとするものである。論理的な観点からみれば、これはメレオロジーの公理系に対してトポロジー的な公理・定義を付け加えることによって得られる拡大された理論である。メレオロジーの論理的表現力には限りがある。メレオロジーにおいては、相異なるすべての対象は、離れている（互いに素）か、一部だけが重なり合っているか、あるいはいずれか一方の真部分になっているかであり、重なり合っていないが接触している、といった微妙な関係は表現できない。メレオロジーのメレオトポロジー的拡張は、こうした関係をも表現すべしという要求に応えるものなのである。

ではいよいよ、次節以降で展開されるメレオトポロジーの基礎となる理論であるメレオロジーの体系を紹介しよう。本稿で扱うのはいわゆる「古典的メレオロジー Classical Mereology」である⁴。これは「 x は y の部分である」と読まれる関係「 Pxy 」をプリミティブにもつ形式的理論であり、以下の公理・定義からなる：

(ACM.1)	Pxx	(反射性 reflexivity)
(ACM.2)	$Pxy \wedge Pyx \rightarrow x=y$	(反対称性 anti-symmetric)
(ACM.3)	$Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz$	(推移性 transitivity)
(ACM.4)	$\neg Pxy \rightarrow \exists z (Pzx \wedge Dzy)$	(強補足性 strong supplementation)
(ACM.5)	$\exists x \varphi x \rightarrow \exists x \forall y (Oxy \leftrightarrow \exists z (\varphi z \wedge Oyz))$	(一般和の存在 existence of general sum)
(DCM.1)	$PPxy := Pxy \wedge \neg Pyx$	(真部分 proper part)
(DCM.2)	$Oxy := \exists z (Pzx \wedge Pzy)$	(被覆 overlap)
(DCM.3)	$Dxy := \neg Oxy$	(互いに素 disjoint)
(DCM.4)	$\sigma x \varphi x := \iota x \forall y (Oxy \leftrightarrow \exists z (\varphi z \wedge Oyz))$	(一般和 general sum)
(DCM.5)	$x+y := \sigma z (Pzx \vee Pzy)$	(和 sum)
(DCM.6)	$x \times y := \sigma z (Pzx \wedge Pzy)$	(積 product)
(DCM.7)	$\sim x := \sigma z Dzx$	(補元 complement)
(DCM.8)	$x-y := \sigma z (Pzx \wedge Dzy)$	(差 difference)
(DCM.9)	$\pi x \varphi x := \sigma x \forall y (\varphi y \rightarrow Pxy)$	(一般積 general product)
(DCM.10)	$U := \sigma x x=x$	(宇宙 universe)

ただし(ACM.5)は公理図式である。また、以下の議論において一般和が登場する際には、述語 φ が空でない、つまり $\exists x \varphi x$ であるということは前提される。他の σ 作用素によって定義された対象についても、そのような対象の存在は前提される。また、上記の式では述語 φ の主語をひとつしか示さなかったが、 φ が単項述語である必要はなく、多項述語である場合も当然許容される。実際、以下でみるように、本稿の主たる考察対象であるメレオトポロジー的体系の基本的な述語は二項関係述語である。

以上は理論のいわば骨格であって、ここからいろいろな定理が導かれる。次節以降のメレオトポロジーの内容に関する証明にあたってはそれらの定理が利用される。だが、本稿においてはメレオロジーの定理に関する証明は原則的に省略する。詳細については参考文献を参照されたい⁵。

2. メレオトポロジー：体系 S と体系 CV

2. 1. 体系の紹介

さていよいよメレオトポロジー体系の検討に入ろう。一般にメレオトポロジーとは、前節で示したようなメレオロジーの体系にトポロジー的な概念に関する公理・定義を付け加えたものである。現在、メレオトポロジー的体系の定式化には複数の方法が知られており、それぞれに特徴がある⁶。

メレオトポロジーにおいて複数の定式化の方法がありうるのは、トポロジー的概念によって相異なる対象の相互関係が詳細に区別されることによる。メレオロジーにおいては、相異なる対象の関係は、離れている（互いに素）か、一部だけが重なり合っている（被覆）か、あるいはいずれか一方の真部分になっているかの四通りの関係に立ちうる。しかし、メレオトポロジーにおいては、相異なる対象は、全く接触していない（したがって当然互いに素）か、お互いの内部が一部重なっている（内的被覆 *internal overlap*）か、いずれか一方の完全な内部にある（内的真部分 *internal proper part*）か、接触しているが重なっていない（外的連結 *external connection*）か、内部は重なっていないがそれでも重なっている（接触的被覆 *tangential overlap*）か、いずれか一方の内部で接触しているか（接触的真部分 *tangential proper part*）かの八通りの関係に立ちうる⁷。これらのいずれも、適切な定式化のもとでメレオトポロジー的体系の原始概念となる資格があり、したがってメレオトポロジー的体系の定式化は一様ではない。

話を元に戻すとして、本稿でとくに注目するのは二つの体系である。それは、バリィ・スミスによる体系とロベルト・カサティおよびアキッレ・ヴァルツィによる体系である⁸。前者は「内的部分 *internal part*」の概念に基づく体系であり、後者は「連結 *connection*」の概念に基づく体系である。メレオトポロジーの研究状況を概観すると、とりわけスミスの体系は多数言及されており、古典的な結果とみなされうる。これにひきかえ、カサティとヴァルツィの体系は比較的新しく、筆者の知る限りこれらを直接比較検討した研究はない。以下、それぞれを体系 S、CV と呼ぶことにするが、これらは具体的には次のようなものである。

【体系 S】

- | | |
|---------|--|
| (AS.1) | $IP_{xy} \rightarrow P_{xy}$ |
| (AS.2a) | $IP_{xy} \wedge P_{yz} \rightarrow IP_{xz}$ |
| (AS.2b) | $P_{xy} \wedge IP_{yz} \rightarrow IP_{xz}$ |
| (AS.3) | $IP_{xy} \wedge IP_{xz} \rightarrow IP_{x(y \times z)}$ |
| (AS.4) | $\exists x \phi x \wedge \forall x (\phi x \rightarrow IP_{xy}) \rightarrow IP_{(\sigma x \phi x)y}$ |

- (AS.5) $\exists y \text{IP}_{xy}$
 (AS.6) $\text{IP}_{xy} \rightarrow \text{IP}_x(\sigma z \text{IP}_{zy})$
- (DS.1) $\text{ix} := \sigma y \text{IP}_{yx}$
 (DS.2) $\text{cx} := \sim(\text{i}(\sim x))$
 (DS.3) $\text{C}_{xy} := \text{O}(\text{cx})y \vee \text{O}_x(\text{cy})$

ここで「 IP_{xy} 」は「 x は y の内的真部分である」と読む。

すでにメレオトポロジー的關係について注意したが、内的真部分關係はメレオロジーにおける真部分とは区別されなければならない。メレオトポロジーにおける内的真部分も接触的真部分もいずれもメレオロジーにおける真部分に該当するであろうから、内的真部分を真部分と同一視すると重要なトポロジー的情報が失われてしまうであろう。

【体系 CV】

- (ACV.1) C_{xx}
 (ACV.2) $\text{C}_{xy} \rightarrow \text{C}_{yx}$
 (ACV.3) $\text{P}_{xy} \rightarrow \forall z (\text{C}_{zx} \rightarrow \text{C}_{zy})$
 (ACV.4) $\text{P}(\text{ix})x$
 (ACV.5) $\text{i}(\text{ix}) = \text{ix}$
 (ACV.6) $\text{ix} \times \text{iy} = \text{i}(x \times y)$
- (DCV.1) $\text{ix} := \sigma y \text{IP}_{yx}$
 (DCV.2) $\text{cx} := \sim(\text{i}(\sim x))$
 (DCV.3) $\text{IP}_{xy} := \text{P}_{xy} \wedge \forall z (\text{C}_{zx} \rightarrow \text{O}_{zy})$

ここで、「 C_{xy} 」は「 x と y は連結している」と読む。また、以下では、(ACV.4)から(ACV.6)までの公理をまとめて「開核公理」と呼ぶことにする。

連結關係については次のことを注意しておく。先の外的連結關係（「EC」と書くことにする）は、連結であるが被覆しない關係として定義できる（すなわち $\text{EC}_{xy} := \text{C}_{xy} \wedge \neg \text{O}_{xy}$ ）。この關係を用いて内的部分關係を定義することもできる。つまり、 $\text{IP}_{xy} \leftrightarrow \text{P}_{xy} \wedge \forall z (\text{C}_{zx} \rightarrow \text{O}_{zy})$ であるが、 $\text{P}_{xy} \wedge \forall z (\text{C}_{zx} \rightarrow \text{O}_{zy}) \leftrightarrow \text{P}_{xy} \wedge \neg \exists z (\text{EC}_{zx} \wedge \text{EC}_{zy})$ であるから、 $\text{IP}_{xy} := \text{P}_{xy} \wedge \neg \exists z (\text{EC}_{zx} \wedge \text{EC}_{zy})$ としてもよい（これは後述する定理を考慮すれば容易に検証できるので本稿では詳細の説明を省略する）。

2. 2. 証明の準備と目標設定

さて、このように定式化のしかたは異なるが同様の目的をもつ理論が与えられたならば、興味が湧くのは、それらの論理的相互關係がどのようになっているかであろう。以下では、諸条件を考慮しながら、この両者が実質的に同値となることを示そう。

「実質的に」というのは、実は、直接に S と CV の同値性を示すのは意外にも困難だか

らである。具体的には次の三点が問題となる。

第一点は次の困難である。のちにみるように、 S においては次が成り立つ。

$$(2.1) \quad Px(iy) \leftrightarrow IPxy$$

しかし、これが CV の定理であるかどうかは不明である。

第二点は次の困難である。 S においては、上記の式に加え、(定義(DS.3)より) 次の式もまた成り立つ。

$$(2.2) \quad O(cx)y \vee Ox(cy) \rightarrow Cxy$$

しかし、これが CV の定理であるのかもやはり不明である⁹。

第三点は次の困難である。 CV においては (定義(DCV.3)より) 次が成り立つ。

$$(2.3) \quad IPxy \leftrightarrow Pxy \wedge \forall z (Czx \rightarrow Ozy)$$

しかし、これが S においても成立するかどうかは不明である。

これらの解決は容易ではないので、以下では S と CV の内容を、それぞれ必要と思われる範囲で豊かにした体系を考えることにする。具体的には次の通りである。

まず、 CV に対しては、次の二つの式を付け加えた体系を考える。

$$(ACV^*.1) \quad Px(iy) \leftrightarrow IPxy$$

$$(ACV^*.2) \quad O(cx)y \vee Ox(cy) \rightarrow Cxy$$

これによって、(2.1)と(2.2)が新たに得られた体系において成立するようになることは明らかである。

他方で、 S には次の式を公理として付け加えた体系を考える。

$$(AS^*) \quad IPxy \leftrightarrow \forall z (Czx \rightarrow Ozy)$$

以下、これらを S^* 、 CV^* とし、これらの論理的関係について考えることとしよう。具体的な目標はこれらの同値性を示すことである。

なお、 CV における開核公理は次のいわゆる「閉包公理」と同値である。

$$(ACV.4') \quad Px(cx)$$

$$(ACV.5') \quad c(cx) = cx$$

$$(ACV.6') \quad cx+cy = c(x+y)$$

同値性の証明は極めて容易であるから省略する。ポイントは、開核公理の代わりにこれらを公理としてもつ体系を CV と考えてもよい、ということである。以下の考察においては

開核公理ではなくこれらを利用することがある。

以上の準備をもとに、いよいよ以下において、メレオトポロジー的体系 S^* と CV^* の論理的な等価性を証明してゆくこととしよう。

3. 体系の比較

3. 1. 内的部分から連結へ

はじめに S^* から CV^* が帰結することを示そう。準備として、 S において、したがって S^* においても、先に述べた(2.1)が成り立つことを示そう。まず、メレオロジーにおける次の条件に注目する。

$$(3.1) \quad Px(\sigma z \varphi z) \leftrightarrow \varphi x \quad (\varphi x \text{ に関する}) \text{ 分配条件 distribution condition}$$

S^* における IP は(最初の関係項に関して)この条件をみたす。つまり φx を $IPxy$ とすれば、 $Px(\sigma z IPzy) \leftrightarrow IPxy$ が成立する。したがって次もまた成立する。

$$(3.2) \quad Px(iy) \leftrightarrow IPxy$$

まずこれを証明しておこう。

証明： $Pxiy$ とおく。定義より $Px(\sigma z IPzy)$ 。 $\sigma z IPzy$ の存在より $\exists z IPzy$ は明らか。よって $\exists z IPzy \wedge \forall z (IPzy \rightarrow IPzy)$ 。よって(AS.4)より $IP(\sigma z IPzy)y$ 。(AS.2b)より $IPxy$ 。
 $IPxy$ とおく。 $IPx(\sigma z IPzy)$ ((AS.6)より)。 $Px(\sigma z IPzy)$ ((AS.1)より)。

重要なのは、メレオロジーにおいて、 $\forall x (Px(\sigma z \varphi z) \leftrightarrow \varphi x) \rightarrow \varphi(\sigma z \varphi z)$ が定理として導出されるということである。つまり、 φx が分配条件をみたせば $\varphi(\sigma z \varphi z)$ が定理となる。したがって、いま述語 IP が分配条件をみたすから、 φx を $IPxy$ とすれば、 $IP(\sigma z IPzy)y$ 。したがって次が定理となる。

$$(3.3) \quad IP(ix)x$$

また、次の定理が証明できる。

$$(3.4) \quad Pxy \rightarrow P(cx)(cy)$$

証明： Pxy とおく。メレオロジーより $P(\sim y)(\sim x)$ 。(3.3)より $IP(i(\sim y))(\sim y)$ 。よって $IP(i(\sim y))(\sim x)$ 。(3.2)より $P(i(\sim y))(i(\sim x))$ 。よって $P(\sim i \sim x)(\sim i \sim y)$ 。定義により $P(cx)(cy)$ 。

これらを補題として利用すれば、以下のようにして S^* から CV^* が帰結することを証明できる。

証明【S*から CV*】：

(ACV.1)の証明：(ACV.4')より $Px(cx)$ が定理。よって $Ox(cx)$ 。よって $Ox(cx) \vee O(cx)x$ 。

(ACV.2)の証明：対称性から明らか。

(ACV.3)の証明： Pxy および Czx を仮定する。仮定 Czx より $Oz(cx) \vee O(cz)x$ 。 $Oz(cx)$ と仮定する。ここで、仮定 Pxy および(3.4)より $P(cx)(cy)$ 。ゆえに $Oz(cy)$ 。よって $Oz(cy) \vee O(cz)y$ 。他方で $O(cz)x$ と仮定する。直ちに $O(cz)y$ 。よって $Oz(cy) \vee O(cz)y$ 。ゆえに $Oz(cy) \vee O(cz)y$ 。ゆえに Czy 。よって $\forall z (Czx \rightarrow Czy)$ 。

(ACV.4)の証明：(3.3)より $IP(ix)x$ 。(AS.1)より $P(ix)x$ 。

(ACV.5)の証明： $P(i(ix))(ix)$ は(ACV.4)より自明。他方で、 $P(ix)(ix)$ (メレオロジー)。(3.3)より $IP(ix)x$ 。(AS.6)より $IP(ix)(ix)$ 。再び(3.2)より $P(ix)(i(ix))$ 。これらを併せて $i(ix)=ix$ 。

(ACV.6)の証明：(AS.3)より $IPzx \wedge IPzy \rightarrow IPz(xxy)$ 。(3.2)より $Pz(ix) \wedge Pz(iy) \rightarrow Pz(i(xxy))$ 。 $P(ixiy)(ix)$ かつ $P(ixiy)(iy)$ であるから (メレオロジー)、 $Pz(ixiy) \rightarrow Pz(i(xxy))$ 。よって $P(ixiy)(i(xxy))$ (メレオロジー)。他方で $P(xxy)x$ 。(3.3)より $IP(i(xxy))(xxy)$ 。よって $IP(i(xxy))x$ 。(3.2)より $P(i(xxy))(ix)$ 。同様にして $P(i(xxy))(iy)$ 。よって $Pi(xxy)(ixiy)$ 。

残るは、定義(DCV.3)、すなわち $IPxy := Pxy \wedge \forall z (Czx \rightarrow Ozy)$ から導かれる式 $IPxy \leftrightarrow Pxy \wedge \forall z (Czx \rightarrow Ozy)$ の妥当性を示すことである。だが、いま考察の対象となっている体系 S* が公理として(AS*)、つまり $IPxy \leftrightarrow \forall z (Czx \rightarrow Ozy)$ をもっていること、および公理(AS.1)に注意するならば、問題の式が成り立つことは直ちに明らかであろう。

したがって、われわれにはここで次の主張が許されるであろう。

主張その1 S*から CV*が帰結する。

3. 2. 連結から内的部分へ

では他方、CV*から S*は帰結するであろうか。まず直ちに明らかかなところから順にみてゆくこととしよう。

証明に先立って少し注意しておく、CV*は公理として(ACV*.1)、つまり $Px(iy) \leftrightarrow IPxy$ をもっていたのであった。これは先の(3.2)に他ならない。以下の証明においてはこの(3.2)とその帰結である(3.3)が重要な役割を果たすことになるが、先の議論を想起すれば、CV*にこのような公理を付け加えるということは、この体系において述語 IP が分配条件を満たすことを要求するということなのである。

証明：【CV*から S*】

(AS.1)の証明：定義より自明。

(AS.2a)の証明： $IPxy \wedge Pyz$ は前提。さらに Cwx を仮定する。 $Pxy \wedge \forall z (Cwx \rightarrow Owy)$ であるから $Cwx \rightarrow Owy$ 。よって Owy 。ゆえに Owz 。他方 Pxz 。よって $Pxz \wedge \forall z (Cwx$

$\rightarrow Owz$)。すなわち $IPxz$ 。

- (AS.2b)の証明： $Pxy \wedge IPyz$ は前提。さらに Cwx を仮定する。 Pxy かつ Pyz より Pxz 。
 Pxy より $\forall w (Cwx \rightarrow Cwy)$ であるから Cwy 。 $IPyz$ より $\forall w (Cwy \rightarrow Owz)$ であるから
 Owz 。ゆえに $\forall w (Cwx \rightarrow Owz)$ 。よって $Pxz \wedge \forall z (Cwx \rightarrow Owz)$ 。ゆえに $IPxz$ 。
(AS.3)の証明： $IPxy \wedge IPxz$ を仮定。(3.2)より $Px(iy)$ かつ $Px(iz)$ 。よって $Px(iy \times iz)$ 。公理
(ACV.6)から $P(iy \times iz)(i(y \times z))$ 。よって $Px(i(y \times z))$ 。ふたたび(3.2)により $IPx(y \times z)$ 。
(AS.4)の証明：(3.2)より、証明すべきは $\exists x \phi \wedge \forall x (\phi \rightarrow Px(iy)) \rightarrow P(\sigma x \phi)(iy)$ である。し
かし一般に $\forall x (\phi \rightarrow Pxy) \rightarrow P(\sigma x \phi)y$ であるから、題意は明らか。
(AS.5)の証明：まず PxU である。また $\forall z (Czx \rightarrow OzU)$ であることに注意すれば、(DCV.3)
よりただちに $IPxU$ 。
(AS.6)の証明：すなわち $IPxy \rightarrow IPx(iy)$ ということである。 $IPxy$ と仮定する。(3.2)より
 $Px(iy)$ 。公理から $P(iy)(i(iy))$ 。よって $Px(i(iy))$ 。ゆえに、ふたたび(3.2)により $IPx(iy)$ 。

残るは、 CV^* において定義(DS.3)から導かれる式 $Cxy \leftrightarrow O(cx)y \vee Ox(cy)$ の妥当性を示す
ことである。ただし(ACV*.2)、つまり $O(cx)y \vee Ox(cy) \rightarrow Cxy$ は公理であるから、次が成り
立つことを示せばよい。

$$(3.4) \quad Cxy \rightarrow O(cx)y \vee Ox(cy)$$

これは以下のようにして示される。

いま、この体系においても(3.2)が成立する。さらに次の定理に注意する。

$$(3.5) \quad IPxy \rightarrow IP(\sim y)(\sim x)$$

証明： $IPxy$ ならば、定義より $Pxy \wedge \forall z (Czx \rightarrow Ozy)$ 。 Pxy より直ちに $P(\sim y)(\sim x)$ 。他方
で $Cz(\sim y)$ とおく。また Pzx と仮定する。すると $\forall w (Cwz \rightarrow Cwx)$ より $C(\sim y)z \rightarrow$
 $C(\sim y)x$ 。よって $C(\sim y)x$ 。 $\forall z (Czx \rightarrow Ozy)$ より $C(\sim y)x \rightarrow O(\sim y)y$ 。よって $O(\sim y)y$ だ
が、これは矛盾。したがって $\neg Pzx$ 。よって $Oz(\sim x)$ 。よって $\forall z (Cz(\sim y) \rightarrow Oz(\sim x))$ 。
よって $P(\sim y)(\sim x) \wedge \forall z (Cz(\sim y) \rightarrow Oz(\sim x))$ 。つまり $IP(\sim y)(\sim x)$ 。

さて(3.3)より $IP(i \sim x)(\sim x)$ である。したがってこの補題(3.5)より $IP(\sim \sim x)(\sim i \sim x)$ 。ゆえに、

$$(3.6) \quad IPx(cx)$$

である。(3.2)とこの(3.6)より、(3.4)が成立する。まず Cxy と仮定する。いま $IPx(cx)$ である。
定義より $Px(cx) \wedge \forall z (Czx \rightarrow Oz(cx))$ 。したがって $Cyx \rightarrow Oy(cx)$ 。よって、 C と O の対称性
より $O(cx)y$ 。すなわち $O(cx)y \vee Ox(cy)$ 。

以上の考察から次の主張が可能であろう。

主張その2 CV^* から S^* が帰結する。

かくして、主張その1と主張その2から、 S^* と CV^* の同値性が帰結した。

以上によって所期の目的は一応達せられたわけであるが、公理(ACV*.2)は、さらにある条件のもとで定理となる。その条件とは $Px(by) \rightarrow Cxy$ である。ただし境界 bx とは $cx-ix$ として定義された境界である。まず、次の定理に注意する。

(3.7) $Oxy \rightarrow Cxy$

証明: Oxy と仮定する。すると $\exists z (Pzx \wedge Pzy)$ 。 $Pzx \wedge Pzy$ と仮定する。よって Pzx 。(ACV.3)より $\forall w (Cwz \rightarrow Cwx)$ 。すると $Czz \rightarrow Czx$ 。(ACV.1)より Czz 。よって Czx 。(ACV.2)より Cxz 。他方で Pzy 。先と同様にして $\forall w (Cwz \rightarrow Cwy)$ 。よって $Cxz \rightarrow Cxy$ 。よって Cxy 。

さて、いま bx は $cx-ix$ であるから閉包 cx は $ix+bx$ である。ここで $O(cx)y \vee Ox(cy)$ とすると、これは $O(ix+bx)y \vee Ox(iy+by)$ となる。したがって $O(ix)y \vee O(bx)y \vee Ox(iy) \vee Ox(by)$ である。この四つの場合のうち、 $O(ix)y$ と $Ox(iy)$ からはともに Oxy が帰結するから、定理(3.7)より直ちに Cxy 。他方、一般に $Ox(by)$ の場合、ある z について Pzx かつ $Pz(by)$ 。ここで、一般に $\forall x \forall y (Px(by) \rightarrow Cxy)$ とすると、 $Pz(by)$ より Czy 。つまり Cyz 。 Pzx より $Cyz \rightarrow Cyx$ であるから Cyx 。よって Cxy 。よって $Ox(by) \rightarrow Cxy$ 。同様に、 O と C の対称性より、 $O(bx)y \rightarrow Cxy$ 。よって $O(bx)y \vee Ox(by) \rightarrow Cxy$ である。したがって $O(cx)y \vee Ox(cy) \rightarrow Cxy$ 。

3. 3. 本節のまとめ

ここでこれまでの議論を振り返っておこう。(ACV*.1)は S の定理である。よって、これは CV においても定理である可能性が高い。また、(ACV*.2)は、 S においては定義からの直接の帰結であるが、カサティとヴァルツィはこれを CV の定理としており、実際には証明可能なのかもしれない。もしそうであれば、 S は CV の部分系である。もちろん、(ACV*.1)が CV の定理ではなかったとしても、これは述語 IP のいわば基本性質であるとみなされるべきであり、これを CV に付け加えることが問題を惹き起こすことはないであろう。

他方で、(AS*)は CV においては定義によって成立する。よって、これが S において定理として導出される可能性は低い。しかしながら、これを付け加えることによって体系が矛盾するとは考えにくいので、これを公理としてもつ体系 S^* を想定するのは自然であろう。

したがって、われわれとしては、本稿のこれまでの考察によって、厳密には S^* と CV^* の同値性が示されたのだが、実質的には S と CV の同値性が示されたと考えるのである。

以上によって厳密な論理的考察には一区切りついたとしよう。次に、体系 S と CV のあいだの直観的な差異について考えてみたい。

CV の特徴は、連結性の本質と考えられるものを直接に記述し、公理化しているところである。本稿で考察した限り、その定式化のなかには直ちに露呈するような問題点はない。しかしながら、こうしたやり方がアプリオリに不可能であるということはないであろうが、それにしても、連結性の本質なるものはわれわれにとってあらかじめ明らかなものでは到底ない。したがって、この方針を採る限り、考察の過程で必要な、あるいは望ましい性質・関係を見落とす危険性からは逃れられないであろう。その意味において、この方針は実際

的ではないと判断せざるを得ない。

CVに比べて、Sは見通しのよい理論である。このことには、内的真部分という概念が連結概念に比べて直観的にわかりやすいということが大いに与っているのかもしれない。だが、この利点は単なるとりつきやすさという次元の問題ではないようにも思われる。というのも、Sの公理と定義は論理的な構造が判然としており、論理的な証明の構成が極めて容易だからである。これは演繹的な理論にとっては極めて重要なことである。

しかしこうしたSの利点は、無条件な、代償を伴わないものではない。CVはトポロジー的概念そのものとでも言うべき開核公理をもっており、これがトポロジー的理論であるということは一目瞭然である。それにひきかえ、Sがトポロジー的であるということは、一定の論理的な手続きを経た上でようやく判明することであろう。一般に、開核や閉包といった「代数的な」トポロジー的概念と、連結性という「幾何学的な」トポロジーの概念の相互関係は、それほど見通しのよいものではない（前者については「形式主義的・構造主義的な」概念とも言えるかもしれない）。この点に関して、本稿で考察の対象とした理論は、それぞれ対照的な直観的性格をもっているのである。本稿の考察に価値があるとすれば、こうした「風貌の相違」にもかかわらず、これらの同値性が明らかになった、という点であろう。

4. おわりに

最後に形而上学者としての特権を享受することにしよう。哲学史上のエピソードを手引きとしてメレオトポロジーの哲学的・形而上学的な意義について考え、本稿の考察を閉じることにはしたい。

主として前世紀に活躍した形而上学者ホワイトヘッドの哲学的体系には、メレオロジーとメレオトポロジーの初等的な試みが見出される。彼は当初、出来事存在論の立場から自然哲学を展開するためメレオロジーに依拠したが、そのとき自然の連続性をメレオロジー的概念のみを用いて表現しようとした。しかしのちに、その試みには理論的な困難が指摘される。そこで彼は、包括的な形而上学を展開する際に方針を転じ、トポロジー的概念である「連結」概念を基礎にとり、それに基づいてメレオロジーを展開する、というやりかたを採用した¹⁰。つまり、理論的基礎をメレオロジーからメレオトポロジーへと改めたのである。

実際、ホワイトヘッドの当初の試みはおそらく成功しない。トポロジー的概念をメレオロジーに還元することは不可能であろう。彼が最初考えていた理論的枠組みでは奇怪なことが起こりうる。いま x と y が z という共通部分をもっているとする。そうであれば、 x と y は連続している、と言いたくなるのが人情である。しかし、 x と z 、 z と y がさらにそれぞれ双方に跨るような共通部分をもたなかったら、これらは連続していないことになってしまう。つまり、 x と y は共通部分をもつにもかかわらずバラバラである、ということが起こりうるのだ！

そうした見地からすると、およそ論理的に整合的な形而上学・自然哲学においては、連続性はひとつの根本概念として立てられるべきなのではないだろうか、と感じられる。つまり、たとえば「連続の形而上学」を標榜したパースのように、連続性をなにか他の概念によって説明しようとするのではなく、形而上学的な根本原理（連続律 *lex continui*）とし

て認めるほうが無理のない立場なのではないだろうか。

かくしてホワイトヘッド哲学の転回やパース哲学の利点はメレオトポロジー的観点から明快に説明できる。哲学の歴史は他にも多数の連続性に関する問題、つまりトポロジー的問題を含むに違いない。これらはいずれも、深淺さまじまな程度ではあるがメレオトポロジーにおいて取り扱われた概念に関連するであろう。メレオトポロジーの研究が真相解明に貢献する可能性に期待したい。

やはりトポロジー的な枠組みを用いることによって正確に記述される概念に「境界 boundary」がある。これもまたメレオトポロジーと密接な関連をもっており、それにまつわる問題（境界は存在するのか、存在するとすればどのようにしてか、これは依存的存在者の典型ではないのか、等々）は哲学的・存在論的に興味深い論点を豊富に含んでいるのであるが、これについては稿を改めることにする。

註

- ¹ 『フッサールの形式的存在論の研究』（2005年、早稲田大学）。左記の論文にまとめられるさらに以前の研究成果の一部は2003年度日本論理哲学会第7回大会において「形式的存在論の論理的基礎」として報告された。
- ² SIMONS [1987]は技術的な話題のみならず、哲学的話題を豊富に含んでおり、現代の分析的哲学の文脈で一種のメレオロジー・ブームをつくった観がある。今回検討した文献の多くは同書の議論に触発された形跡がある。ただし、サイモンズ自身はメレオトポロジー研究にはそれほどコミットしていない。
- ³ すべてのメレオロジストが唯名論的形而上学を奉じていたわけではない。ごく初期のメレオロジーの建設者には現象学者フッサール（『論理学研究』第三研究）や形而上学者ホワイトヘッド（『自然認識の諸原理』）が含まれるが、彼らはいずれも本質 Wesen やイデア（永遠客体）について語ることを躊躇しない実念論者 realist である。ただし、彼らにしても、この世界に具体的な個別者とならんで空集合に相当するものが存在する、という考えは否定したであろう。
- ⁴ SIMONS [1987], p.37 以下における SC、CASATI & VARZI [1999], Ch.3 における GEM に相当する。
- ⁵ 拙稿（SAITO [2003]）で、メレオロジーがブール代数をなすこと、したがってブール代数的な定理が成立することを具体的に示した。ただし、この結果自体はかなり早い時期にタルスキらに知られている。
- ⁶ RIDDER [2002]には、本稿では触れない体系についても詳細な検討と分析がある。
- ⁷ Cf. CASATI & VARZI [1999], p.55f
- ⁸ B.SMITH [1996]および CASATI & VARZI [1999], Ch.5
- ⁹ 後に示すように、ある条件のもとで成り立つ。なお、この逆は定理である。
- ¹⁰ これが、ホワイトヘッド哲学におけるいわゆる科学哲学期から形而上学期への移行の論理的核心であろうと筆者は考えている。ホワイトヘッドの初期の数理哲学（『普遍代数論』）から中期の科学哲学にかけての世界観は、論理のブール代数と出来事のメレオロジーのあいだに自然な対応があって見事に調和しているが、後期の形而上学（『過程と実在』）ではこうした統一性が失われ、産み落とされた怪物的体系は膨大な形而上学的仮定に支えられてようやく姿形を保っているようにみえる。この変化の背景にメレオロジーからメレオトポロジーへの移行があり、論理的単純性が失われたことが大きく影響していると考えるのはうがちすぎであろうか。因みに、今回参照・検討した諸文献（SIMONS

[1987], CASATI & VARZI [1999], RIDDER [2002]) は、いずれもホワイトヘッドのメレオロジーについて一定のページを割いて考察している。

文献

Casati, R. and A. Varzi, 1999, *Parts and Places: The Structures of Spatial Representation*, Cambridge (MA): MIT Press

Ridder, L., 2002, *Mereologie: Ein Beitrag zur Ontologie und Erkenntnistheorie*, Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann

Simons, P. M., 1987, *Parts: A Study in Ontology*, Oxford: Oxford University Press

Smith, B., 1996, 'Mereotopology: A Theory of Parts and Boundaries', *Data and Knowledge Engineering* 20, 287-303

Saito, N. (齋藤暢人), 2003, 'Mereorōjī no daisūteki kōzō no kenkyū (メレオロジーの代数的構造の研究) (A Study in the Algebraic Structure of Mereology)', *Ronri Tetsugaku Kenkyū* (論理哲学研究) (*Journal of Logical Philosophy*) 3, 38-51

(早稲田大学非常勤講師)