メレオロジーの代数的構造の研究

齋藤　暢人

０．

近年､複数の論者によって形式的存在論 Formal Ontology の理論的整備がすすめられている[1]。その実態は、メレオロジーおよびメレオトポロジーの整備であり、したがって「全体部分関係および接触関係、依存関係を利用した存在論の構築」と概括することが許されよう。

本稿では、とくにそのメレオロジーに関する部分に焦点を当てて、これまでの議論の整理に努める。とくに、巷間言われるメレオロジーのブール代数的性質の分析を具体的目標とし、そのために束論を利用する。筆者としては、公理的に提示された束論とメレオロジーの定理の比較は、メレオロジーの特徴を明確かつ具体的に把握する最上の方法であろうという感触を得ている。そして、そのような純論理的考察を行ったうえで、メレオロジーに依拠する形式的存在論の哲学的立場についても若干の考察を試みることにしたい。

本論に入るに先立って従来の研究動向に注意しておこう。研究の方向性はタルスキの古典的研究において既に示されている。タルスキは、TARSKI [1935/56]において、メレオロジーがブール代数と深い関連を有することを指摘した。ただしその研究結果の詳細は未刊にとどまっている。後続する研究者はほぼいずれもタルスキの業績を参照しているが、筆者の知る限りメレオロジーとブール代数の関係を上述のような方法で具体的に示した文献はない[2]。メレオロジーが（ある種の）ブール代数であるという主張そのものは極めて有名で、検証も比較的容易であるから、筆者はとりたててプライオリティを主張するつもりはないが、メレオロジーがさらなる発展を遂げた今日、明確な方法論的意識をもって古典的な問題を振り返ることに些かの意義を感じてはいる。

１．

１．１．メレオロジーの公理系：古典的メレオロジー

メレオロジーにはさまざまなヴァリエーションがあり、それぞれ微妙に異なる表現力を有することが知られている。本稿ではその差異には立ち入らず、最も一般的でそれなりに表現力を有するいわゆる「古典的メレオロジーclassical mereology」を扱う[3]。この理論は「Pxy」という関係をプリミティヴにもつ。これは「x は y の部分である」ということを表しており、以下の公理によってその振舞が規制される：

(ACM.1)	Pxx	（反射性 reflexivity）
(ACM.2)	$Pxy \wedge Pyx \rightarrow x=y$	（反対称性 anti-symmetric）
(ACM.3)	$Pxy \wedge Pyz \rightarrow Pxz$	（推移性 transitivity）
(ACM.4)	$\neg Pxy \rightarrow \exists z (Pzx \wedge Dzy)$	（強補足性 strong supplementation）

(ACM.5) $\exists x\, \varphi \rightarrow \exists x \forall y\, (Oxy \leftrightarrow \exists z\, (\varphi \wedge Oyz))$ （一般和の存在）

ただし(ACM.5)は公理図式である。それぞれについて簡単に説明しておこう。(ACM.1)から(ACM.3)までは、部分関係がいわゆる半順序であることを主張している。また、本稿では立ち入らないが、(ACM.4)を弱めたりすることでメレオロジーのヴァリアントを得ることができる[4]。(ACM.5)は任意の対象の和を取ることが許されることを主張している。

また、すでに上記の式の中に一部登場した一連のメレオロジー的概念がやはり部分関係によって定義され、導入される：

(DCM.1) $PPxy := Pxy \wedge \neg Pyx$ （真部分 proper part）
(DCM.2) $Oxy := \exists z\, (Pzx \wedge Pzy)$ （被覆 overlap）
(DCM.3) $Dxy := \neg Oxy$ （互いに素 disjoint）
(DCM.4) $\sigma x\, \varphi := \iota x \forall y\, (Oxy \leftrightarrow \exists z\, (\varphi \wedge Oyz))$ （一般和 general sum）
(DCM.5) $x+y := \sigma z\, (Pzx \vee Pzy)$ （和 sum）
(DCM.6) $x \times y := \sigma z\, (Pzx \wedge Pzy)$ （積 product）
(DCM.7) $\sim x := \sigma z\, Dzx$ （補元 complement）
(DCM.8) $x - y := \sigma z\, (Pzx \wedge Dzy)$ （差 difference）
(DCM.9) $\pi x\, \varphi := \sigma x \forall y\, (\varphi \rightarrow Pxy)$ （一般積 general product）
(DCM.10) $U := \sigma x\, x = x$ （宇宙 universe）

１．２．もうひとつの定義―― 一般和を操作するために

次に、上述のメレオロジー的対象の定義に注目してみよう。これらの定義はメレオロジー的対象のあいだにブール代数的演算が成り立つことを述べているようにみえる。実際そのとおりであり、われわれはこれを後に確認する。

しかし、これらの定義では一般和が用いられており、操作には少々不便である。そのため、これらと等価でより操作しやすい定義を次のように導入する[5]：

(DCM.5’) $x+y := \iota z \forall w\, (Owz \leftrightarrow Owx \vee Owy)$
(DCM.6’) $x \times y := \iota z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Pwy)$
(DCM.7’) $\sim x := \iota z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Dwx)$
(DCM.8’) $x - y := \iota z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Dwy)$
(DCM.9’) $\pi x\, \varphi := \iota z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow \forall x\, (\varphi \rightarrow Pwx))$

これはいわゆる「個体計算 Calculus of Individuals」における定義である。この定義のもとでそれぞれ次の定理が成り立つ：

(TCM.51) $\exists z \forall w\, (Owz \leftrightarrow Owx \vee Owy)$ （和の存在）
(TCM.61) $\exists z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Pwy)$ ただし Oxy （積の存在）
(TCM.71) $\exists z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Dwx)$ ただし $\exists y\, Dxy$ （補元の存在）
(TCM.81) $\exists z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Dwy)$ ただし $\neg Pxy$ （差の存在）

(TCM.91) $\exists z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow \forall x\, (\varphi \rightarrow Pwx))$
ただし$\exists y \forall x\, (\varphi \rightarrow Pyx)$ （一般積の存在）

また、古典的メレオロジーにおいては外延性が成り立つ、つまり$\forall z\, (Pzx \leftrightarrow Pzy) \leftrightarrow x=y$ や、こればかりでなく$\forall z\, (Ozx \leftrightarrow Ozy) \leftrightarrow x=y$ が定理であることに注意すると、

(TCM.52) $\exists ! z \forall w\, (Owz \leftrightarrow Owx \vee Owy)$ （和の一意性）
(TCM.62) $\exists ! z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Pwy)$ ただし Oxy （積の一意性）
(TCM.72) $\exists ! z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Dwx)$ ただし$\exists y\, Dxy$ （補元の一意性）
(TCM.82) $\exists ! z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Dwy)$ ただし$\neg Pxy$ （差の一意性）
(TCM.92) $\exists ! z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow \forall x\, (\varphi \rightarrow Pwx))$
ただし$\exists y \forall x\, (\varphi \rightarrow Pyx)$ （一般積の一意性）

となり、ここで記述の公理$\exists ! x\, \varphi \rightarrow \varphi(\iota x \varphi)$により、次の定理が成立する：

(TCM.53) $\forall z\, (Oz(x+y) \leftrightarrow Ozx \vee Ozy)$
(TCM.63) $\forall z\, (Pz(x \times y) \leftrightarrow Pzx \wedge Pzy)$ ただし Oxy
(TCM.73) $\forall z\, (Pz(\sim x) \leftrightarrow Dzx)$ ただし$\exists y\, Dxy$
(TCM.83) $\forall z\, (Pz(x-y) \leftrightarrow Pzx \wedge Dzy)$ ただし$\neg Pxy$
(TCM.93) $\forall z\, (Pz(\pi x\, \varphi) \leftrightarrow \forall x\, (\varphi \rightarrow Pzx))$ ただし$\exists y \forall x\, (\varphi \rightarrow Pyx)$

ここで、以下の一連の同値な命題から、はじめに採用した定義のもとでも同様の帰結が得られることは明らかである[6]：

(TCM.54) $\forall w\, (Owz \leftrightarrow \exists v\, ((Pvx \vee Pvy) \wedge Ovw)) \leftrightarrow \forall w\, (Owz \leftrightarrow Owx \vee Owy)$
(TCM.64) $\forall w\, (Owz \leftrightarrow \exists v\, ((Pvx \wedge Pvy) \wedge Ovw)) \leftrightarrow \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Pwy)$
(TCM.74) $\forall w\, (Owz \leftrightarrow \exists v\, (Dvx \wedge Ovw)) \leftrightarrow \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Dwx)$
(TCM.84) $\forall w\, (Owz \leftrightarrow \exists v\, ((Pvx \wedge Dvy) \wedge Ovw)) \leftrightarrow \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwx \wedge Dwy)$
(TCM.94) $\forall w\, (Owz \leftrightarrow \exists v\, (\forall u\, (\varphi \rightarrow Pvu) \wedge Ovw)) \leftrightarrow \forall w\, (Pwz \leftrightarrow \forall x\, (\varphi \rightarrow Pwx))$

また、次の定理が成り立つことを注意しておく[7]：

(TCM.10) $E!\, (x \times y) \leftrightarrow Oxy$
(TCM.11) $E!\, (\sim x) \leftrightarrow U \neq x$
(TCM.12) $E!\, (\sim x) \leftrightarrow \exists y\, Dxy$
(TCM.13) $E!\, (x-y) \leftrightarrow \neg Pxy$

以上挙げられた定理は以下の証明において自由に用いる。のみならず明示的に言及されないこともある。また、紙幅の都合上証明を省略する場合が多いが、そのように結果としてのみ示された定理も、上述の定理を参照することによって容易にその妥当性を示すこと

ができるはずである。

２．

以上で述べたのは、いわば部分関係を形式的に表現する理論の構文論である。論理的観点から真に興味深いのは、これによって表現される代数的構造とはどのようなものか、という、いわば意味論的問題である。早速、メレオロジーの代数的性質を調べることによってこの問題に取り組んでみよう。具体的には、メレオロジーは「最小元をもたない完備ブール代数 a complete Boolean Algebra without Zero」であるとされるが、これを確かめてみることにしよう[8]。

２．１．束とブール代数

まずブール代数とは何かを示したいが、そのためには束 lattice を利用する。束とは、集合 A のうえで、次のような演算が可能な数学的構造$\langle A, \cup, \cap \rangle$である。

1-∩	$x \cap x = x$	1-∪	$x \cup x = x$
2-∩	$x \cap y = y \cap x$	2-∪	$x \cup y = y \cup x$
3-∩	$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$	3-∪	$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$
4-∩	$x \cap (x \cup y) = x$	4-∪	$x \cup (x \cap y) = x$

つまり、これらは束の公理である。

続いて束の特徴を記述してゆこう。ただし、束論の厳密な展開は本稿の意図するところではないので、以下証明は省略する。詳細については文献を当られたい[9]。

さて、ここでさらに次のように定義する：

(DL.1) $x \leq y := x \cap y = x$

あるいは、この双対をとって次のように定義してもよい：

(DL.2) $x \leq y := x \cup y = y$

≤は明らかに順序である。すると、(後に束にはさまざまな種類があることが示されるが) 一般には次が成り立つ：

(TL.1) $(x \cap y) \cup (x \cap z) \leq x \cap (y \cup z)$

(TL.2) $x \cup (y \cap z) \leq (x \cup y) \cap (x \cup z)$

(TL.3) $z \leq x \rightarrow (x \cap y) \cup z \leq x \cap (y \cup z)$

これらの性質を強めることによって特徴的な代数的構造をもつ束が得られる。まず、次のように分配律 distribution law を公理としてもつとする：

(AL.1) $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup z)$
(AL.2) $(x \cup y) \cap (x \cup z) = x \cup (y \cap z)$

そのような束を分配束 distributive lattice という。

また、次をモデュラー律 modular law といい、これをも公理とする束をモデュラー束 modular lattice という：

(AL.3) $z \leq x \rightarrow (x \cap y) \cup z = x \cap (y \cup z)$

分配律はモデュラー律を含意するので、分配束はモデュラー束である。

束の最大元と最小元をそれぞれ 1、0 とする。束における次の性質を充たす x′を補元 complement とよぶ：

(AL.4) $x \cap x' = 0$
(AL.5) $x \cup x' = 1$

このような補元をもつ束を相補束 complementary lattice という。

一般に、束が分配束であり、かつ相補束でもあるならば、これをブール代数 Boolean algebra という。

ブール代数においては次の諸定理が成り立つ：

(TB.1) $0 = 1'$ かつ $1 = 0'$
(TB.2) $x = (x')'$
(TB.3) $(x \cap y)' = x' \cup y'$ かつ $(x \cup y)' = x' \cap y'$
(TB.4) $x \leq y \leftrightarrow y' \leq x'$
(TB.5) $x \leq y \leftrightarrow x' \cup y = 1$
(TB.6) $x \leq y \leftrightarrow x \cap y' = 0$

更に条件を強めてみよう。いま、ある束の空でない部分集合に対して常に上限と下限が存在するとき、その束を完備束 complete lattice という。

いま、（空でない集合 I に対して）無限和および無限積を次のようにあらわす：

(DL.3) $\bigcup i \in I\ a_i := a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_i \cup \ldots$
(DL.4) $\bigcap i \in I\ a_i := a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_i \cap \ldots$

完備束において次のような定理が成り立つ：

(TL.4) $\bigcup i \in I\ a_i \cup \bigcup i \in I\ b_i = \bigcup i \in I\ (a_i \cup b_i)$
(TL.5) $\bigcap i \in I\ a_i \cap \bigcap i \in I\ b_i = \bigcap i \in I\ (a_i \cap b_i)$

(TL.6)　$\bigcup_{i\in I} (a\cap b_i) \leq a\cap \bigcup_{i\in I} b_i$
(TL.7)　$a\cup \bigcap_{i\in I} b_i \leq \bigcap_{i\in I} (a\cup b_i)$

(TL.8)　$\bigcup_{f\in J^I}(\bigcap_{i\in I} a_{if(i)}) \leq \bigcap_{i\in I}(\bigcup_{j\in J} a_{ij})$
(TL.9)　$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J} a_{ij}) \leq \bigcap_{f\in J^I}(\bigcup_{i\in I} a_{if(i)})$

完備束であるようなブール代数を完備ブール代数 complete Boolean algebra という。完備ブール代数においては、無限和と無限積に関して次の弱完全分配律 weak complete distribution law が成り立つ。

(TB.7)　$a\cap \bigcup_{i\in I} b_i = \bigcup_{i\in I} (a\cap b_i)$
(TB.8)　$a\cup \bigcap_{i\in I} b_i = \bigcap_{i\in I} (a\cup b_i)$

以上が、束論的に表現された、ブール代数の必要最小限の代数的性質である。

２．２．メレオロジーの代数的構造

では以上の準備を経た上で、メレオロジーの代数的性質を検討してみよう。まず、次の諸定理から、一部の式に現れる前提を除くと、メレオロジー的演算が束の構造をとることがわかる。

1-×	$x\times x = x$	1-+	$x+x = x$
2-×	$Oxy \rightarrow x\times y = y\times x$	2-+	$x+y = y+x$
3-×	$\exists w (Pwx \wedge Pwy \wedge Pwz) \rightarrow (x\times y)\times z = x\times(y\times z)$	3-+	$(x+y)+z = x+(y+z)$
4-×	$x\times(x+y) = x$	4-+	$Oxy \rightarrow x+(x\times y) = x$

つまり、これらは×と+に関して双対となっている。また、これらのうち 1 から 3 までは、サイモンズが定理として示している[10]。4 についてのみ簡単に証明を示す。

証明：まず 4-×について。$Px(x+y)$は定理[11]。よって明らかに $Ox(x+y)$。ここで $Oxy \rightarrow P(x\times y)x$ が定理であることに注意すると、直ちに $P[x\times(x+y)]x$ [12]。$Px[x\times(x+y)]$を示す。先と同様に $Ox(x+y)$。ゆえに(TCM.63)より$\forall z\ (Pz[x\times(x+y)] \leftrightarrow Pzx \wedge Pz(x+y))$。ここで Pxx（(ACM.1)）かつ $Px(x+y)$に注意するとただちに $Px[x\times(x+y)]$を得る。

次に 4-+について。$Px[x+(x\times y)]$は自明。$P[x+(x\times y)]x$ を示す。まず Pxx。また Oxy より $P(x\times y)x$。ここで $P(x+y)z \leftrightarrow Pxz \wedge Pyz$ は定理である[13]。すると $P[x+(x\times y)]x$。■

以下、同様の式が成立することを確認してゆこう。上記の八つの式に加えて、メレオロジーにおいては、さらに、先に示した束における定義に相当する式が定理として証明される：

(TCM.20) $Oxy \to (Pxy \leftrightarrow x\times y=x)$[14]

(TCM.21) $Pxy \leftrightarrow x+y=y$[15]

また、一般に成立する定理に対応する定理が次のように成り立つ：

(TCM.22) $Oxy \wedge Oxz \to P[(x\times y)+(x\times z)][x\times(y+z)]$

(TCM.23) $Oyz \to P[x+(y\times z)][(x+y)\times(x+z)]$

(TCM.24) $Oxy \to (Pzx \to P[(x\times y)+z][x\times(y+z)])$

これらについて簡単に証明を示しておく。

(TCM.22)について：$Oxy \wedge Oxz$ であるから $P(x\times y)x$ かつ $P(x\times z)x$。また $P(x\times y)y$ かつ $P(x\times z)z$。他方で $Py(y+z)$かつ $Pz(y+z)$。ゆえに $P(x\times y)(y+z)$かつ $P(x\times z)(y+z)$。$P(x\times y)x \wedge P(x\times y)(y+z)$、$P(x\times z)x \wedge P(x\times z)(y+z)$であるから $P(x\times y)[x\times(y+z)]$、$P(x\times z)[x\times(y+z)]$。ゆえに $P[(x\times y)+(x\times z)][x\times(y+z)]$。■

(TCM.23)について：$Px(x+y)$かつ $Px(x+z)$であるから $Px[(x+y)\times(x+z)]$。また、Oyz であるから $P(y\times z)y$ かつ $P(y\times z)z$。他方で $Py(x+y)$かつ $Pz(x+z)$であるから $P(y\times z)(x+y)$ かつ $P(y\times z)(x+z)$。ゆえに $P(y\times z)[(x+y)\times(x+z)]$。ゆえに $P[x+(y\times z)][(x+y)\times(x+z)]$。■

(TCM.24)について：Oxy ゆえに $P(x\times y)x$ かつ $P(x\times y)y$。$Py(y+z)$であるから $P(x\times y)[x\times(y+z)]$。他方、$Pzx$ かつ $Pz(y+z)$であるから $Pz[x\times(y+z)]$。よって $P[(x\times y)+z][x\times(y+z)]$。■

さらに、メレオロジーにおいては、次の分配律に対応する式は定理である：

(TCM.25) $Oxy \wedge Oxz \to (x\times y)+(x\times z) = x\times(y+z)$

(TCM.26) $Oyz \to (x+y)\times(x+z) = x+(y\times z)$

のみならず、束におけるモデュラー律に対応する式も定理として導かれる：

(TCM.27) $Oxy \to (Pzx \to (x\times y)+z = x\times(y+z))$

これらについて証明しておこう。証明に先立って若干注意すべき点を指摘しておく。まず、メレオロジーの定理 $Px(y+z) \wedge Dxz \to Pxy$ が多用される（この定理自体は証明しない）[16]。以下、定理(#)としてこの定理に言及する。また、Dxy と Oxy とが矛盾することを利用して場合分けを行う。

(TCM.25)について：$Oxy \wedge Oxz \to P[(x\times y)+(x\times z)][x\times(y+z)]$は既に示したので（(TCM.22)）、$Oxy \wedge Oxz \to P[x\times(y+z)][(x\times y)+(x\times z)]$を示せばよい。$Pw[x\times(y+z)]$とおく。すると $Pwx \wedge Pw(y+z)$。ここで Dwy と仮定すると、定理(#)より Pwz。よって $Pwx \wedge Pwz$。Oxz であるから $Pw(x\times z)$。ゆえに $Ow(x\times z)$。さらに $Ow(x\times y) \vee Ow(x\times z)$。よって

$Ow[(x \times y)+(x \times z)]$。他方 Owy と仮定する。定義より $\exists v\ (Pvw \wedge Pvy)$ であるから、さらに $Paw \wedge Pay$ と仮定する。すると Paw であり、また Pwx であったから Pax。よって Pay より $Pa(x \times y)$。ゆえに、$\exists v\ (Pvw \wedge Pv(x \times y))$ であるから $Ow(x \times y)$。よって $Ow(x \times y) \vee Ow(x \times z)$。よって $Ow[(x \times y)+(x \times z)]$。それゆえ $\forall w\ (Pw[x \times (y+z)] \rightarrow Ow[(x \times y)+(x \times z)])$ としてよい。すると、公理(ACM.4)から $P[x \times (y+z)][(x \times y)+(x \times z)]$。■

(TCM.26)について：$Oyz \rightarrow P[x+(y \times z)][(x+y) \times (x+z)]$ は既に示したので（(TCM.23)）、$Oyz \rightarrow P[(x+y) \times (x+z)][x+(y \times z)]$ を示せばよい。$Pw[(x+y) \times (x+z)]$ とおく。すると $Pw(x+y) \wedge Pw(x+z)$。ここで Dwx と仮定する。よって $Pw(x+y)$ と定理(#)より Pwy であり、$Pw(x+z)$ と定理(#)より Pwz である。それゆえ $Pw(y \times z)$。ゆえに $Ow(y \times z)$。ゆえに $Owx \vee Ow(y \times z)$。よって $Ow[x+(y \times z)]$。他方で Owx と仮定すると、直ちに $Owx \vee Ow(y \times z)$。よって $Ow[x+(y \times z)]$。したがって $\forall w\ (Pw[(x+y) \times (x+z)] \rightarrow Ow[x+(y \times z)])$ としてよく、すると公理(ACM.4)から $P[(x+y) \times (x+z)][x+(y \times z)]$。■

(TCM.27)について：$Oxy \rightarrow (Pzx \rightarrow P[(x \times y)+z][x \times (y+z)])$ は既に示したので（(TCM.24)）、$Oxy \rightarrow (Pzx \rightarrow P[x \times (y+z)][(x \times y)+z])$ を示せばよい。Oxy とせよ。また Pzx とせよ。すると Oxz。ここで $Pw[x \times (y+z)]$ とおく。すると(TCM.25)より $Pw[(x \times y)+(x \times z)]$。すると $Ow[(x \times y)+(x \times z)]$ であるから $Ow(x \times y) \vee Ow(x \times z)$。ここでメレオロジーの定理 $Oxz \rightarrow P(x \times z)z$ に注意すると、いずれにせよ $Ow[(x \times y)+z]$ となる。よって $\forall w\ (Pw[x \times (y+z)] \rightarrow Ow[(x \times y)+z])$。すると公理(ACM.4)から $P[x \times (y+z)][(x \times y)+z]$■

証明から直ちに気づかれることを幾つか述べておこう。以上三つの式の証明では、いずれも最後に公理(ACM.4)が効いている。したがって、メレオロジーのより弱いヴァリアントにおいてはこれらの式は証明できないであろう。すると当然それらはブール代数とならないはずである。同様のことは以下に挙げる式の証明においてもみられる。

この体系の検討を続けてゆこう。メレオロジーは最小元をもたない。それゆえ、任意の x と y の積をとるという通常のブール代数では許される操作が、メレオロジーでは許されない。では、ブール代数における表現‘$x \times y = 0$’をどうすべきであろうか。

ここでメレオロジーにおける積の性質を振り返ってみると、先に(TCM.10)として示されたように、メレオロジーにおいては、積が存在するということと共通部分をもつということは同値なのであった。したがって、メレオロジーにおいては、積が存在しないということは、x と y が（文字通り）disjoint であっていかなる共通部分も「もたない」ということである[17]。

したがって、メレオロジーはブール代数における表現‘$x \times y = 0$’に直接に対応する表現をもたないが、‘Dxy’という表現をそのような表現として当てることはできる。つまり、‘$x \times y = 0$’は‘Dxy’と解釈されるのである。

こうした事情を勘案した上で補元について考えると、先の相補束の性質(AL.4)、すなわち $x \cap x' = 0$ は、メレオロジーにおける定理 $U \neq x \rightarrow Dx(\sim x)$ に相当すると解してよい[18]。また、メレオロジーでは $U \neq x \rightarrow x+(\sim x) = U$ が定理である[19]。これは相補束の性質(AL.5)、すなわち $x \cup x' = 1$ に対応する。

したがって、常に最小元が存在するという前提が充たされるかぎりで、メレオロジーは

ブール代数であることがわかる。ブール代数において成り立つ諸定理に対応するメレオロジーの定理は次である：

(TCM.28)　$\neg E!(\sim U)$　かつ　$E!(U)$

(TCM.29)　$U \neq x \rightarrow x = \sim(\sim x)$[20]

(TCM.30)　$U \neq x \wedge U \neq y \wedge U \neq x+y \rightarrow [(\sim x)\times(\sim y) = \sim(x+y)]$　かつ
$U \neq x \wedge U \neq y \wedge Oxy \rightarrow [(\sim x)+(\sim y) = \sim(x\times y)]$

(TCM.31)　$U \neq x \wedge U \neq y \rightarrow Pxy \leftrightarrow P(\sim y)(\sim x)$

(TCM.32)　$U \neq x \rightarrow Pxy \leftrightarrow (\sim x)+y = U$

(TCM.33)　$U \neq y \rightarrow Pxy \leftrightarrow Dx(\sim y)$

　これらについても証明しておこう。まず、(TCM.28)は、宇宙の定義(DCM.10)より直ちに明らかであるから、ここで改めて証明しない。また、話が前後するが、はじめに(TCM.31)から証明し、以下これを利用する。その際サイモンズの定理(SCT55)、すなわち $U \neq y \rightarrow Px(\sim y) \leftrightarrow Dxy$ や上記の定理(TCM.29)などをレンマとして利用する。なお(SCT55)には以下(##)として言及する。

(TCM.31)について：Pxy とおく。また Pw(~y)とおく。すると Dwy（(##)より）。前提より Dwx。ゆえに Pw(~x)（(##)と(TCM.29)より）。よって $\forall w\ (Pw(\sim y) \rightarrow Pw(\sim x))$。よって P(~y)(~x)。「逆」を示す。P(~y)(~x)とおく。すると D(~y)x（(##)より）。定義より $\forall w\ (Pwx \rightarrow \neg Pw(\sim y))$。ここで Pax とおく。すると $\neg Pa(\sim y)$。よって $\neg Da(\sim\sim y)$（(##)と(TCM.29)より）。よって $\neg Day$（(TCM.29)より）。よって Oay。よって $\forall w\ (Pwx \rightarrow Owy)$。よって Pxy。■

(TCM.30)について：与えられた前提のもとで $P[\sim(x+y)][(\sim x)\times(\sim y)]$ および $P[(\sim x)+(\sim y)][\sim(x\times y)]$ を示すのは容易である。$P[\sim(x+y)][(\sim x)\times(\sim y)]$ の場合、$U \neq x \wedge U \neq y \wedge U \neq x+y$ ならば $O(\sim x)(\sim y)$ であるから、$(\sim x)\times(\sim y)$ の存在が保証されること、また $P[(\sim x)+(\sim y)][\sim(x\times y)]$ の場合、$U \neq x \wedge U \neq y \wedge Oxy$ ならば $U \neq x\times y$ であり、したがって $\sim(x\times y)$ の存在が保証されることに注意し、メレオロジーの定理(TCM.63)や SCT36、すなわち $P(x+y)z \leftrightarrow Pxz \wedge Pyz$、(TCM.31)などをレンマとして用いればよい。それゆえ $P[(\sim x)\times(\sim y)][\sim(x+y)]$ と $P[\sim(x\times y)][(\sim x)+(\sim y)]$ を示す。

　まず $P[(\sim x)\times(\sim y)][\sim(x+y)]$ を示す。$Pw[(\sim x)\times(\sim y)]$ とおく。すると $Pw(\sim x) \wedge Pw(\sim y)$。よって Pw(~x)であるが、すると(##)より Dwx。また Pw(~y)であるが、するとやはり(##)より Dwy。ここで $Dwx \wedge Dwy$ であるが、これは Dw(x+y)である。よって Pw~(x+y)。ゆえに $\forall w\ (Pw[(\sim x)\times(\sim y)] \rightarrow Pw\sim(x+y))$ であるから $P[(\sim x)\times(\sim y)][\sim(x+y)]$。

　次に $P[\sim(x\times y)][(\sim x)+(\sim y)]$ を示す。$Pw[\sim(x\times y)]$ とおく。すると(##)より $Dw(x\times y)$。Paw とおく。すると $\neg Pa(x\times y)$。よって $\neg(Pax \wedge Pay)$。よって $\neg Pax \vee \neg Pay$。$\neg Pax$ と仮定する。すると(##)および(TCM.29)より $\neg Da(\sim x)$。よって Oa(~x)であるから $Oa(\sim x) \vee Oa(\sim y)$ であり、それゆえ $Oa[(\sim x)+(\sim y)]$。$\neg Pay$ と仮定する。同様にして $Oa[(\sim x)+(\sim y)]$。よって $Oa[(\sim x)+(\sim y)]$。ゆえに $\forall v\ (Pvw \rightarrow Ov[(\sim x)+(\sim y)])$。よって $Pw[(\sim x)+(\sim y)]$。よって $P[\sim(x\times y)][(\sim x)+(\sim y)]$。■

(TCM.32)について：$Pxy \to (\sim x)+y = U$を示す。Pxyとおく。さらにまたPwUとおく。(SCT54)より$(\sim x)+x=U$。よって$Pw[(\sim x)+x]$。すると$Ow[(\sim x)+x]$。よって$Ow(\sim x) \vee Owx$。すると前提よりいずれにせよ$Ow[(\sim x)+y]$。よって$PU[(\sim x)+y]$。ここで$PUx \to x=U$は定理（サイモンズの(SCT51)）。よって$(\sim x)+y=U$。

$(\sim x)+y = U \to Pxy$を示す。$(\sim x)+y = U$とおく。Pwxとおく。すると(##)および(TCN-29)より$Dw(\sim x)$。ここでDwyを仮定する。すると$Dw(\sim x) \wedge Dwy$であるが、これは$Dw[(\sim x)+y]$に他ならない。すると前提よりDwUだが、これは矛盾。よってOwy。よって$\forall w\, (Pwx \to Owy)$よりPxy。■

(TCM.33)について：(##)と(TCM.29)より直ちに明らか。■

メレオロジーにおいては、公理図式(ACM.5)により、任意の空でない述語に対して、それを充たす諸対象の和が常に存在する。これは、任意の対象の集積に対して部分関係に関する上限が存在することを意味している。

この意味において、つまり（先の補元に関して議論した場合と同様に）最小元の存在が保証される限りにおいて、メレオロジーは完備である。つまり、メレオロジーは（最小元をもたない）完備ブール代数であることになる。

すると、先に挙げた完備ブール代数における無限和および無限積に関する諸定理に対応する、メレオロジー的無限和および無限積に関する諸定理もまた成立するはずである。実際、これは幾つかの概念を定義することにより確かめられる。

まず、無限和および無限積を次のように定義する：

(DCM.11) $\sum i \in I\ a_i := \iota z \forall w\, (Owz \leftrightarrow \exists i\, (i \in I \wedge Oxa_i))$

(DCM.12) $\prod i \in I\ a_i := \iota z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow \forall i\, (i \in I \to Pxa_i))$

これらは、直観的には以下のようなものである：

$\sum i \in I\ a_i = \iota z \forall w\, (Owz \leftrightarrow Owa_1 \vee Owa_2 \vee \ldots \vee Owa_n)$

$\prod i \in I\ a_i = \iota z \forall w\, (Pwz \leftrightarrow Pwa_1 \wedge Pwa_2 \wedge \ldots \wedge Pwa_n)$

つまり次のようなものである：

$\sum i \in I\ a_i := a_1+a_2+\ldots+a_i$

$\prod i \in I\ a_i := a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_i$

ここで次の定理が成り立つことに注意する[21]：

(TCM.100) $Ox[\sum i \in I\ a_i] \leftrightarrow \exists i\, (i \in I \wedge Oxa_i)$[22]

(TCM.101) $\exists x \forall i\, (i \in I \to Pxa_i) \to \forall x\, [Px[\prod i \in I\ a_i] \leftrightarrow \forall i\, (i \in I \to Pxa_i)]$

すると次のような諸定理が成立することがわかる：

(TCM.102) $\sum i\in I\ a_i+\sum i\in I\ b_i = \sum i\in I\ (a_i+b_i)$

(TCM.103) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Pxa_i \wedge Pxb_i) \rightarrow \prod i\in I\ a_i\times\prod i\in I\ b_i = \prod i\in I\ (a_i\times b_i)$

(TCM.104) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Pxa \wedge Pxb_i) \rightarrow P[\sum i\in I\ (a\times b_i)][a\times\sum i\in I\ b_i]$

(TCM.105) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Pxb_i) \rightarrow P[a+\prod i\in I\ b_i][\prod i\in I\ (a+b_i)]$

(TCM.106) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Px\sum j\in J\ a_{ij}) \rightarrow P[\sum f\in J^I(\prod i\in I\ a_{if(i)})][\prod i\in I(\sum j\in J\ a_{ij})]$

(TCM.107) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Px\sum j\in J\ a_{ij}) \rightarrow P[\sum i\in I(\prod j\in J\ a_{ij})][\prod f\in J^I(\sum i\in I\ a_{if(i)})]$

さらに、弱完全分配律に対応する次のような定理が成立する：

(TCM.108) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Pxa \wedge Pxb_i) \rightarrow a\times\sum i\in I\ b_i = \sum i\in I\ (a\times b_i)$

(TCM.109) $\exists x\forall i\ (i\in I \rightarrow Pxb_i) \rightarrow a+\prod i\in I\ b_i = \prod i\in I\ (a+b_i)$

これらの証明は省略する。見かけは厳しいものの証明はむしろ容易である。
かくして、メレオロジーのブール代数的構造が確認された。

２．３．補足――差について

束を論じるときに差を導入する必要はない。しかし、集合の冪集合上に展開されるいわゆる集合ブール代数においては、差は基本的な演算のひとつである。また、メレオロジーでは通常差が定義されている。そこで、一般のブール代数的な差とメレオロジー的な差を比較して、両者の対応を確認しておこう（記号が紛らわしいが、両者が混在することはないので改めて区別しない）。

差は次のような性質をもつ：

(D.1) $x-y = (x\cup y)-y$

(D.2) $x-y = x-(x\cap y)$

(D.3) $x-y = x\cap y'$

メレオロジーにおいてもまた、対象 x と y の差 x−y について次がなりたつ（証明は容易なので省略する）：

(TCM.40) $\neg Pxy \rightarrow x-y = (x+y)-y$

(TCM.41) $\neg Pxy \wedge Oxy \rightarrow x-y = x-(x\times y)$[23]

(TCM.42) $\neg Pxy \rightarrow x-y = x\times(\sim y)$[24]

こうしたことは、メレオロジーの基本的な演算がブール代数的構造を保つことの一証左である。

３.

これまでメレオロジーの代数的構造を明らかにしてきたが、この結果は哲学的な観点からみても興味深いものである。

周知のフレーゲ・ラッセル的伝統においては、ブール代数はひとえに論理の構造である。つまり、ブール代数は、なによりもまず命題のあいだに成立する構造であるとされる。しかし、仮にここから、ブール代数は単なる言語的規約の所産にすぎず、存在論的含意をもたないという結論を導いたならば、それは誤りであろうとおもわれる。

論理学の歴史を簡単に振り返ってみると、上述のフレーゲ・ラッセル的伝統とは異なる、もうひとつの伝統があることに気づく。それは「代数的アプローチ」とでも言うべきものである。それは、ごくかいつまんで言うならば、ブールによって着手された研究課題をパースが完成し、シュレーダーによる「論理代数 Algebra der Logik」としての整備を経て、バーコフの束論に結実した、とされる[25]。

ここで注目したいのは、このような代数的アプローチにおけるブール代数的構造の位置づけである。このアプローチはもちろんブール代数を研究対象とする。しかしながらこの立場は、その代数的構造が命題のあいだに成立するのか、それとも対象のあいだに成立するのかという問題を開いたままにとどめておく。つまり、この立場からすれば、ブール代数は論理構造をも包括するようなより一般的な構造なのである。それを命題間の関係の構造とみるということは、それだけで既に何らかの解釈を前提することになるのである。

われわれがこれまで示してきたこと、つまりメレオロジーもやはりブール代数であるということは、この代数的アプローチの思想的立場を支持するようにおもわれる。というのも、メレオロジーが意図しているのは、明らかに対象のあいだに成立すべき構造を記述することだったからである。つまり、メレオロジーの存在は、ブール代数的構造を直ちに論理構造と同一視するような発想に対する反例となりうるようにおもわれるのである。

そもそも、集合ブール代数における基本的演算は集合論に固有の述語である成員 membership 関係から導かれたものではなく、クラス計算の性質として知られていたものを論理と成員関係によって表現したものとみなされるべきである。このことは、（ハンティントンが行ったように）集合論の扶けをかりることなくクラス計算を公理化することが可能である、という事実からわかる。それゆえ、クラス計算に典型的なブール代数的構造は論理以外の関係、すなわちクラスの包摂関係によるものとみなされるべきであるが、するとそれに対する集合ブール代数は、いわば論理そのものとみなされるべきではないだろうか。

集合ブール代数とメレオロジーのあいだに成立している関係もまた、この集合ブール代数とクラス計算の関係と類比的な関係ではないだろうか。そうであるとすれば、メレオロジーが対象の構造や関係を記述することを意図しているということは重大な哲学的意義を帯びてくる。というのも、それは、ブール代数的構造から存在論的な意味を積極的に読み取ろうとする試みだということになるからである。ブール代数を命題の関係としてのみ解釈する反実在論的立場にはこうした姿勢はみられないようにおもわれる。

振り返ってみるならば、代数的アプローチの伝統のなかには、たとえばホワイトヘッドの「普遍代数 universal algebra」を見出すことができる[26]。また、フッサールの初期論理学研究の成果もまたここに位置づけられるべきであるようにおもわれる。彼はシュレーダー

の著作を研究し、メレオロジーの基本定理のいくつかを確認している[27]。

すると、メレオロジーを主要な道具立てとする形式的存在論というプログラムは、この代数的アプローチにおいて然るべき生を享けたのではないだろうか。その提唱者フッサールがこの伝統にコミットしてもいることは偶然事とはおもわれないし、この伝統のなかに存在論および形而上学への関心を読み取ること自体が決して難しいことではない。パースやホワイトヘッドにおいては、論理学の研究は直ちに存在論的研究を意味するのであり、パースにはトポロジー研究の、ホワイトヘッドにはメレオロジー研究の成果がある[28]。それゆえ形式的存在論がメレオロジーに依拠する限り、その哲学的立場は代数的アプローチの立場と軌を一にするものとなるであろう。この立場では、メレオロジーのプリミティヴである部分関係は、対象の空間時間的配置やその認知の構造である順序そのものとみなされるのである。

したがって、メレオロジーにおけるブール代数的構造を直ちに論理構造と同一視することはできない。のみならず、より一般に、ブール代数的構造を直ちに論理構造と同一視するのは正しくないようにおもわれる。個人的には、メレオロジーは最小元のないブール代数なのではなく、むしろブール代数がメレオロジーに最小元を加えたものなのではないかとすらおもう。もちろんこの主張には適切な論理的裏付けが欠けているが、ブール代数にはそのような読み込みが許される漠然とした地位が与えられるべきことを、今回の結果は物語っていないだろうか。少なくとも筆者にとって、ブール代数に存在論的秩序を感知したかつての形而上学的論理学者たちの主張の魅力はいまなお衰えを知らない。

注

1 本稿では主に SIMONS [1987], CASATI & VARZI [1999]を採り上げる。それ以外にはB．スミス、K．ファインらが議論に参加しているが、彼らの仕事はむしろメレオトポロジーの範疇に属するので、機会を改めて論じることにしたい。

2 Cf. SIMONS [1987], p.25; CASATI & VARZI [1999], pp.47, 205n29。RIDDER [2002], Ch. 3 はタルスキの主張を整理しているが、アプローチの仕方は本稿と異なる。

3 SIMONS [1987], p.37 以下における SC、CASATI & VARZI [1999], Ch.3 における GEM に相当する。

4 Cf. SIMONS [1987], p. 30; CASATI & VARZI [1999], p.48

5 この節は BREITKOPF [1978]を参考にした。SIMONS [1987]はこれを整理しなおしているが、若干の見落としがあるように感じられ、腑に落ちない。典型的なブール代数的定理を具体的かつ体系的に提示することで、体系の性格をより深いところまでとらえてみようというのが本稿の狙いである。

6 Cf. BREITKOPF [1978], p.231f.

7 Cf. RIDDER [2002], p.97

8 Cf. SIMONS [1987], p.25; CASATI & VARZI [1999], p.47

9 本稿では小野寛晰『関係の代数』教育出版, 1974、同『情報代数』共立出版, 1994 などを参考にした。また、既述のように、RIDDER [2002], Ch.3 にはまとまった記述がある。

10 Cf. SIMONS [1987], p. 38f. : 1-×は SCT23、2-×は SCT24、3-×は SCT30、1-+は SCT31、2-+は SCT32、3-+は SCT33 に対応する。なお、以下において、サイモンズが示した定理にはしばしば言及するが、それら自体は証明しない（筆者は確認したが、いずれも容易に証明できる)。必要とおもわれる範囲で参照箇所を指示する。

[11] Cf. SIMONS [1987], SCT34
[12] Cf. SIMONS [1987], SCT25
[13] Cf. SIMONS [1987], SCT36
[14] Cf. SIMONS [1987], SCT27, SCT28
[15] Cf. SIMONS [1987], SCT40
[16] Cf. SIMONS [1987], SCT 41
[17] Cf. LEONARD & GOODMAN [1940], p.46
[18] Cf. SIMONS [1987], SCT53
[19] Cf. SIMONS [1987], SCT54
[20] Cf. SIMONS [1987], SCT56
[21] Cf. BREITKOPF [1978], p.232
[22] I が空ではないことに注意。
[23] Cf. SIMONS [1987], SCT49
[24] ~y の存在を保証する要請∃z Dzy は不要である。¬Pxy と公理(ACM.4)から y と disjoint なものの存在が帰結するからである。
[25] こうした経緯に関しては SIMONS [1987], pp.101ff.を参照。また、末木剛博『記号論理学』東大出版会, 1962 は周辺の事情に詳しい。
[26] Whitehead, A. N., 1898, *A Treatise on universal Algebra with Application*. ただしこの著作は未見である。その概要に関しては前出の末木『記号論理学』を参考にした。
[27] Cf. HUSSERL [1891]
[28] パースの連続体の研究（カントルらへの言及がみられる）、ホワイトヘッドのいわゆる自然科学期三部作、および『過程と実在』における延長連続体の研究を念頭に置いている。形式的存在論の研究者のなかには、とくに後者に関心を寄せる者がおり、その成果も興味深いものがある。今回詳しく触れる余裕はないが、今後引き続いて検討してゆきたい。Cf. SIMONS [1987], pp.81-86, CASATI & VARZI [1999], Ch. 4 および Ch. 5, RIDDER [2002], Ch. 4, Sec. 3

文献

Casati, R. & A. C. Varzi, 1999, *Parts and Places*, MIT Press

Breitkopf, A., 1978, ‘Axiomatisierung einiger Begriffe aus Nelson Goodmans *The Structure of Appearance*’, *Erkenntnis* 12, 229-247

Husserl, E., 1891, ‘Der Folgerungskalkül und die Inhaltslogik’, ‘Der Folgerungskalkül und die Inhaltslogik. Nachträge’ in his *Aufzätze und Rezensionen (1890-1910)*, 1979, Husserliana XXII, 44-66, 67-72

Leonard, H. S. & N. Goodman, 1940, ‘The Calculus of Individuals and its Uses’, *Journal of Symbolic Logic* 5, 45-55

Ridder, L., 2002, *Mereologie*, Klostermann

Simons, P. M., 1987, *Parts*, Oxford University Press

Tarski, A., 1935/56, ‘Zur Grundlegung der Booleschen Algebra’, Eng. trans. by J. H. Woodger, ‘On the Foundations of Boolean Algebra’, in his *Losic, Semantics, and Metamathematics*, 1956, 2nd ed., Hackett, 1983, 320-341

（埼玉大学非常勤講師）