

§ 1 公理的性質論 MZFC

周知のように、公理的集合論においては正則公理 F A (Foundation Axiom) が問題とされる。これは集合間の帰属関係を $\in$ で表したとき、 $\cdots \wedge x_3 \in x_2 \wedge x_2 \in x_1 \wedge x_1 \in x$ となる無限の集合の系列、 $x, x_1, x_2, \cdots$ が存在しないことを主張するものである。このとき、 $x, x_1, x_2, \cdots$ には同じものがあってもかまわない。従って、正則公理は、 $x \in x$ となるような、いわば $\in$ に関して循環する集合が存在しないことも主張している。これに反して非正則公理 A F A (Anti Foundation Axiom) は、上記のような無限の系列や循環を許すものである。⁽¹⁾

この論文ではこのような非正則公理を集合のみではなく、性質に一般化することを試みる。つまり、例えば、性質 x が x 自身を有することが可能となるような、性質の理論の構成を試みる。ここではこのような理論の基礎的な体系として、公理的性質論 (Axiomatic Property Theory) の一つである MZFC (Modal ZFC) という公理体系をとる。以下に述べるように、MZFC は第 1 階の様相述語論理 S5 と、(選択公理 C を含む) Zermelo-Fraenkel の公理的集合論 ZFC を組み合わせた体系である。⁽²⁾ 以下ではまず、MZFC に基づく性質の一般的理論を述べる。次に、性質に関する正則公理 MFA と、それより弱い形の正則公理 MFA* を述べる。さらに、これらに対応した、性質に関する非正則公理 MAF A と、それより弱い形の非正則公理 MAF A* を述べる。そして、MZFC に MAF A を付け加えた体系 MZFC + MAF A の可能世界モデルを、ZFC + AFA において構成し、前者の (後者に対する相対的) 無矛盾性を証明する。また、MAF A (あるいは MFA) が MAF A* (あるいは MFA*) から導かれなことを、上記の可能世界モデルを利用して証明する。最後に、MAF A の哲学等への応用について述べる。

MZFC は ZFC と同様、変項 x, y, z 及び u, v, w を有する (以下では必要に応じて $x_1, x_2, \cdots$ も用いる。他の変項に関しても同様とする)。ただし、これらの変項は集合ではなく、性質を表しているとする。後にも述べるように、MZFC においては集合や個体等の対象は、性質の特殊なものとして扱われる。従って、MZFC はいわば性質一元論の立場をとるものである。また、MZFC は $x \in y, x = y$ という式を有するが、これらはそれぞれ、性質 x が性質 y を有すること、性質 x が性質 y と同一であることを表している。MZFC は次のような論理記号を有している。

結合記号： $\sim$ (否定), $\wedge$ (連言), $\vee$ (選言), $\supset$ (含意)
 $\equiv$ (等値), $\Box$ (必然), $\Diamond$ (可能)

量化記号： $\forall$ (全称), $\exists$ (存在)

さらに、かっこ $(), \{ \}, []$ も用いられる。MZFC の式一般は、これらの式と記号から ZFC と同様にして (ただし様相記号も用いて) 構成される。これらの式を Φ, Ψ で表す。また、MZFC においては新しい表現が定義によって導入されるが、ここではこれらの定義は公理と見なすことにする。この論文では、公理、定義、定理をそれぞれ「A」,

「D」「T」で表す．また，被定義項を $\equiv_{df}$ ， $=_{df}$ の左辺で表す．以下で公理，定義，定理として述べられる式 Φ は，正確にはその必然性に関して閉じた式， $\Box \Phi$ であるとする．さらに， Φ が自由変項 $x, x_1, \dots, x_n$ を含むときは，その全称に関して閉じた式， $\forall x \forall x_1 \dots \forall x_n \Box \Phi$ であるとする．定義によって導入される項を σ, τ で表す．以下では括弧の省略等も通常の規約に従う．

MZFCは（等号を含む）公理体系S5に，以下に述べる公理を付け加えたものである（この論文ではS5における証明は省略する）．公理に先だって次のように定義する．

まず，性質 x を有する対象が存在するとき， x は実在すると言ひ， $E!(x)$ あるいは明らかな場合，括弧を省略して $E!x$ と表す．

$$D1 \quad E!(x) \equiv_{df} \exists y (y \in x)$$

次に， $\Phi(x)$ が x を自由変項として含む式るとき， $\Phi(x)$ となる x が唯一つ存在するということを $\exists! x \Phi(x)$ と表す．即ち，

$$D2 \quad \exists! x \Phi(x) \equiv_{df} \exists y \forall x \{ \Phi(x) \equiv x = y \}$$

なお，D2における変項 y は $\Phi(x)$ において自由であるとする．また， $\Phi(x)$ は自由変項 x を含んでいなくてもよいとする．以下，同様な表現に関しても同じように規約をする．新しい結合記号を次のように定義する．

$$D3 \quad \Phi \Rightarrow \Psi \equiv_{df} \Box (\Phi \supset \Psi)$$

$$D4 \quad \Phi \Leftrightarrow \Psi \equiv_{df} \Box (\Phi \equiv \Psi)$$

$$D5 \quad \Delta \Phi \equiv_{df} \Phi \Leftrightarrow \Box \Phi$$

$\Phi \Rightarrow \Psi$ ， $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ のとき，それぞれ， Φ は Ψ を論理的に含意する， Φ と Ψ は論理的に等値であると言う．また， $\Delta \Phi$ のとき， Φ は論理（確定）的であると言う． $\Delta \Phi$ は $\Phi \Leftrightarrow \Diamond \Phi$ あるいは $\Box \Phi \vee \Box \sim \Phi$ と等値である．ZFCと同様，次のように定義する．

$$D6 \quad u \subseteq v \equiv_{df} \forall x (x \in u \supset x \in v)$$

$$D7 \quad u \doteq v \equiv_{df} \forall x (x \in u \equiv x \in v)$$

さらに，次のように定義する．

$$D8 \quad u \leq v \equiv_{df} \Box (u \subseteq v)$$

MZFCは次のような公理を有する．（A8が含む 0 や $v \cup \{v\}$ は後に定義される．）

$$A1 \quad \Box (u \doteq v) \supset u = v$$

$$A2 \quad \exists v \forall x [x \in v \Leftrightarrow \{\Diamond x \in u \wedge \Phi(x)\}]$$

$$A3 \quad \exists w \forall x \{x \in w \Leftrightarrow (x \in u \wedge x \in v)\}$$

$$A4 \quad \exists u \forall z \{z \in u \Leftrightarrow (z = x \vee z = y)\}$$

$$A5 \quad \exists v \forall x \{x \in v \Leftrightarrow \exists w (x \in w \wedge w \in u)\}$$

$$A6 \quad \exists w \forall v (v \in w \Leftrightarrow v \leq u)$$

$$A7 \quad \forall x \forall y \forall z [\{\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z)\} \Rightarrow y = z] \supset \\ \forall u \exists v \forall y [y \in v \Leftrightarrow \exists x \{\Diamond x \in u \wedge \Phi(x, y)\}]$$

$$A8 \quad \exists u \{0 \in u \wedge \forall v (v \in u \supset v \cup \{v\} \in u)\}$$

これらの公理はZFCのそれらに対応している．ただし，前者は基本的には後者の $\supset$ ， $\equiv$ の代わりに，それぞれ $\Rightarrow$ ， $\Leftrightarrow$ を含んだものである．また，A6は $\subseteq$ の代わりに，D8で定義された $\leq$ が用いられている．さらに，A2，A7は新たに $\Diamond$ を含んでいる．ZFCの場合と同様にして，A2～A4は他の公理から導くことができる．従って，これらは必ず

しも公理として必要ではない．MZFCはこれらの公理に，後に述べるA9とA10及び選択公理Cを付け加えた体系である．以下ではこのようなMZFCの定理，定義を述べる．

性質 u ， v は単にそれらの外延が等しいだけでなく，そのことが必然的であるとき，同一であるとする．即ち，公理A1が成り立つとする．

式 $\Phi(x)$ に対して $\forall x \{x \in u \Leftrightarrow \Phi(x)\}$ となる性質 u が存在するときは，A1よりこのような u は唯一つ存在する．以下ではこれを $[x : \Phi(x)]$ と表す．

$$D9 \quad [x : \Phi(x)] = u \equiv_{df} \forall x \{x \in u \Leftrightarrow \Phi(x)\}$$

以下，逐一定理としては述べないけれども， $[x : \Phi(x)]$ という表現が用いられるときは， $\forall x \{x \in u \Leftrightarrow \Phi(x)\}$ となる u が存在することが証明される．

MZFCにおいては，A2における $\Diamond$ を除いた次の定理が成り立つ．

$$T1 \quad \exists v \forall x [x \in v \Leftrightarrow \{x \in u \wedge \Phi(x)\}]$$

T1と同様，A7における $\Diamond$ を除いた式も同様に証明される．

公理あるいはT1に基づいて，MZFCの項が次のように定義される．

$$D10 \quad 0 =_{df} [x : x \neq x]$$

$$D11 \quad u \cap v =_{df} [x : x \in u \wedge x \in v]$$

$$D12 \quad u - v =_{df} [x : x \in u \wedge \sim x \in v]$$

$$D13 \quad u \cup v =_{df} [x : x \in u \vee x \in v]$$

$$D14 \quad \{x, y\} =_{df} [z : z = x \vee z = y]$$

$$D15 \quad \{x\} =_{df} \{x, x\}$$

$$D16 \quad 1 =_{df} \{0\}$$

$$D17 \quad \langle x, y \rangle =_{df} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$D18 \quad \cup u =_{df} [x : \exists v (x \in v \wedge v \in u)]$$

$$D19 \quad \cap u =_{df} [x : x \in \cup u \wedge \forall v (v \in u \supset x \in v)]$$

$$D20 \quad Pw(u) =_{df} [v : v \leq u]$$

これらの項はZFCのそれらに対応している．ただし，これらは性質を表している．また，D20においては， $\subseteq$ の代わりに $\leq$ が用いられている．

§2 集合

MZFCにおいては，集合を性質の特殊なものとして，つまり論理（確定）的な性質として扱う．即ち，MZFCにおいては，性質 u は集合であるということを $SET(u)$ と表し，次のように定義する．

$$D1 \quad SET(u) \equiv_{df} \forall x \Delta x \in u$$

§1のD5より， $SET(u)$ ということは， $\forall x (x \in u \Leftrightarrow \Box x \in u)$ ということである．後にも述べるように，集合をこのようなものと考えれば，MZFCにおいてZFCの公理（に対応したMZFCの式）をすべて証明することができる．より正確に言えば，ZFCにおいて集合でないアトム（atom）の存在の可能性を認めた体系ZFCAの公理をすべて証明できる．もちろん，この場合，アトムは集合でない性質である．以下では変項 α ， β ， γ で集合を表す．ここでは集合でない性質が存在するとする．即ち，

$$A9 \quad \exists u \sim SET(u)$$

また，任意の性質 u に対して，それと外延が等しい集合 α が存在するとする．

$$A10 \quad \forall u \exists \alpha (u \doteq \alpha)$$

A10 より, A9 は次のような, 性質一般に関する外延性の公理の否定と等値となる.

$$T1 \quad \sim \forall u \forall v (u \doteq v \supset u = v)$$

定義より, $\forall u \triangle \text{SET}(u)$ となる. また, 任意の α に対して $\forall x \triangle x \in \alpha$ である. それ故, 式 Φ が $\text{SET}(u)$, $x \in \alpha$, $x = y$ という形の式から, 論理記号を用いて構成されるとき, あるいは定義によってそのような式と論理的に等値となるとき, Φ は論理確定的となる, 即ち, $\triangle \Phi$ となる. 通常 ZFC A で用いられる式 Φ は, 上記のようにして構成される. 従って, ZFC A の式 Φ は論理確定的である.

定義より明らかに, 0 は集合である. また, 任意の x , y に対して, $\{x, y\}$, $\{x\}$, 1 , $\langle x, y \rangle$ 及び $\text{Pw}(x)$ も集合となる.

さらに, 集合 α , β に対しては, $\alpha \cap \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cup \beta$ も集合となる. 以下, 逐一定理としては述べないけれども, ある性質が集合と言われるときは, そのことが証明される. また, $[x : \Phi(x)]$ が集合になるときは, ZFC と同様これを $\{x : \Phi(x)\}$ と表す. §1 の D18, D19 より明らかに, α が集合の集合のとき, 即ち $\forall x \{x \in \alpha \supset \text{SET}(x)\}$ のとき, 次の定理が成り立つ.

$$T2 \quad \cup \alpha = \{x : \exists \gamma (x \in \gamma \wedge \gamma \in \alpha)\}$$

$$T3 \quad \cap \alpha = \{x : x \in \cup \alpha \wedge \forall \gamma (\gamma \in \alpha \supset x \in \gamma)\}$$

任意の集合 α , β に対しては, $(\beta \subseteq \alpha) \Leftrightarrow (\beta \leq \alpha)$ となる. それ故, §1 の D20 より, 集合の集合 α に対しては, 次の定理が成り立つ.

$$T4 \quad \text{Pw}(\alpha) = \{\beta : \beta \subseteq \alpha\}$$

それ故, 集合のみが問題とされているときは, §1 の D10~D20 で定義された表現は, ZFC A のそれと同じものとして扱うことができる.

先にも述べたように, MZFC においては ZFC A の公理をすべて証明することができる. まず, $\text{SET}(0)$ であるから,

$$T5 \quad \exists x \text{SET}(x)$$

また, 集合 α , β に対しては, $(\alpha \doteq \beta) \Leftrightarrow \square (\alpha \doteq \beta)$ となる. それ故, A1 より,

$$T6 \quad (\alpha \doteq \beta) \supset \alpha = \beta$$

即ち, ZFC A の外延性の公理が成り立つ.

§1 の T1 より, 任意の α と式 $\Phi(x)$ に対して, $\forall x [x \in v \Leftrightarrow \{x \in \alpha \wedge \Phi(x)\}]$ となる v が存在するが, このような v に対しては A10 より, $v \doteq \beta$ となる集合 β が存在する. それ故, ZFC A の部分集合の公理が成り立つ. 即ち,

$$T7 \quad \exists \beta \forall x [x \in \beta \equiv \{x \in \alpha \wedge \Phi(x)\}]$$

同様に, ZFC A の他の公理も証明される. 即ち,

$$T8 \quad \exists \gamma \forall x \{x \in \gamma \equiv (x \in \alpha \wedge x \in \beta)\}$$

$$T9 \quad \exists \alpha \forall z \{z \in \alpha \equiv (z = x \vee z = y)\}$$

$$T10 \quad \exists \beta \forall x \{x \in \beta \equiv \exists \gamma (x \in \gamma \wedge \gamma \in \alpha)\}$$

$$T11 \quad \exists \beta \forall x [x \in \beta \equiv \{\text{SET}(x) \wedge x \subseteq \alpha\}]$$

$$T12 \quad \forall x \forall y \triangle \Phi(x, y) \supset$$

$$\{\forall x \forall y \forall z [\{\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z)\} \supset y = z] \supset$$

$$\forall \alpha \exists \beta \forall y [y \in \beta \equiv \exists x \{x \in \alpha \wedge \Phi(x, y)\}]\}$$

$$T13 \quad \exists \alpha \{0 \in \alpha \wedge \forall \beta (\beta \in \alpha \supset \beta \cup \{\beta\} \in \alpha)\}$$

先にも述べたように、通常ZFCAで用いられる式 $\Phi(x, y)$ に対しては、 $\forall x \forall y \Delta \Phi(x, y)$ となる。それ故、T12はZFCAの置換公理と見なすことができる。

以下では、ZFCAにおけると同様に、種々の定義がなされているとする。例えば、関係、関数が次のように定義されているとする。

$$D4 \quad \text{REL}(\alpha) \equiv_{df} \forall x \{x \in \alpha \supset \exists y \exists z (x = \langle y, z \rangle)\}$$

$$D5 \quad \text{FNC}(\alpha) \equiv_{df} \text{REL}(\alpha) \wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z \{(\langle x, y \rangle \in \alpha \wedge \langle x, z \rangle \in \alpha) \supset y = z\}$$

なお、D4は変項 α を用いた条件的定義の形で述べたが、正確には α の代わり u を用い、 $\equiv_{df}$ の右辺に‘ $\wedge \text{SET}(u)$ ’が付加されるものとする。他の定義に関しても同様とする。以下では関数を変項 f で表す。そして関数 f の定義域を $\text{Dom}(f)$ 、値域を $\text{Rg}(f)$ とする。

$$D6 \quad \text{Dom}(f) =_{df} \{x : \exists y (\langle x, y \rangle \in f)\}$$

$$D7 \quad \text{Rg}(f) =_{df} \{y : \exists x (\langle x, y \rangle \in f)\}$$

関数 f が x に対応させる対象を $f(x)$ あるいは $f x$ と表す。そして $f(x)$ 自身が関数のとき、 $f(x)$ が y に対応させる対象を $f(x)(y)$ あるいは $f(x, y)$ と表す。さらに、項 $\sigma(x)$ が与えられたとき、 α の元 x に対して $\sigma(x)$ を対応させる関数を、 $\lambda x \in \alpha \sigma(x)$ 、あるいは α が明らかな場合は $\lambda x \sigma(x)$ と表す。さらに、以下では上記のもの以外にもZFCAにおける種々の定義がなされていると仮定する。

ここでは、次のような形の選択公理(Axiom of Choice)をCとする。

$$C \quad \forall \alpha \exists f \forall \beta \{(\beta \in \alpha \wedge \beta \neq 0) \supset f(\beta) \in \beta\}$$

なお、この場合の $f(\beta) \in \beta$ は、 $\exists x (\langle \beta, x \rangle \in f \wedge x \in \beta)$ の省略とする。

先にも述べたように、MZFCはA1～A10及びCを公理とする体系である。上に述べたことから、ZFCAの公理はすべてMZFCにおいて証明される。

ここでは、ZFCAの公理には含めないが、次のような公理を正則公理FAとする。

$$FA \quad \alpha \neq 0 \supset \exists x (x \in \alpha \wedge x \cap \alpha = 0)$$

最初に述べたように、FAは次のようなFA1と等値になることがZFCAにおいて証明される。

FA1 $\cdots \wedge x_3 \in x_2 \wedge x_2 \in x_1 \wedge x_1 \in x$ となる無限の系列、 $x, x_1, x_2, \cdots$ は存在しない

次に、集合に関する非正則公理AFAを述べるが、それに先だって次のように定義する。まず、ある(空でない)集合を N とし、 N の元を節(node)と言う。以下では、変項 n, m は節を表すとする。 n と m の順序対 $\langle n, m \rangle$ を縁(edge)と言い、縁の集合を E で表す。ある節の集合 N と、その縁の集合 E から構成される順序対 $\langle N, E \rangle$ をグラフ(graph)と言い、 G で表す。 $G = \langle N, E \rangle$ のとき、 N の元を G の節とも言う(縁等に関しても同様に規約をする)。グラフ $\langle N, E \rangle$ と $\langle N_1, E_1 \rangle$ において、 $N \subseteq N_1, E \subseteq E_1$ のとき、前者は后者の部分(グラフ)であると言う。

$\langle n, m \rangle \in E$ のとき、 n は m の親(parent)である、あるいは m は n の子(child)であると言い、 $n \rightarrow m$ と記す。また、 $\langle n, n_1 \rangle$ と $\langle n_1, n_2 \rangle$ が縁のとき、 $n \rightarrow n_1 \rightarrow n_2$ と記す。節の有限あるいは無限の系列を経路(path)と言う。なお、経路の節は重複

してもよく、従って循環してもよいとする．もちろん、その場合、経路は無限になる． $n \rightarrow n_1 \rightarrow \dots \rightarrow n_k$ となる経路が存在するとき、 n は n_k の祖先(ancestor)である、あるいは n_k は n の子孫(descendant)であると言う．グラフ G の節 n は、 n 以外のすべての節が n の子孫であるとき、到達可能(accessible)であると言う(n は n 自身の子孫であってもなくてもどちらでもよい)．あるグラフにおける到達可能な節は、複数存在しうる．以下で問題とされるグラフは、到達可能な節を有しており、またその特定の一つが先頭の節(point)として指定されているとする．

グラフ G のタグ(tag)とは、 G の子のないすべての節に、空集合 0 あるいはアトムを対応させる関数 t である．先にも述べたように、ここでアトムというのは集合でない性質である．タグ t を有する G の飾り(decoration)とは、 G の節全体を定義域とする、次の条件を満たす関数 d である．

- D 7 (1) n に子がないとき、 $d n = t n$
 (2) n に子があるとき、 $d n = \{d m : n \rightarrow m\}$

アトムを考えない場合は、(1)の $t n$ は 0 とする．もちろん、このときタグを考える必要はない．なお、以下では明らかな場合、言及を省略するが、アトムを認める場合は、グラフに対してあるタグ t が与えられているとする．

あるグラフ G の飾り d が存在し、 G の先頭の節 n に対して $d n = x$ となるとき、 x は G によって描かれる(pictured)、あるいは G は x を描くと言う．

ここで任意の集合 α に対して、タグ t を有するグラフ G を次のように帰納的に定義する．まず、先頭の節を α 自身とする．そして、 G の節 n が集合であり、また $x \in n$ のとき、 x を G の節とし $n \rightarrow x$ とする． n が集合でないかあるいは 0 のときは、 $t(n) = n$ とする．このような G を α の基準的(canonical)なグラフと言ひ、 $G^c(\alpha)$ と表す． α の基準的グラフ G の節にそれ自身を対応させる関数 d は、明らかに G の飾りであり、また $d \alpha = \alpha$ である．それ故、任意の集合 α に対して、 α を描くグラフ G が存在することになる．

非正則公理A F Aは、次のような形で与えられる．

A F A すべてのグラフは唯一つの飾りを有する

先に述べたように、A F AからはF A 1におけるような無限の系列の存在が導かれる．

§ 3 事態

事態というのは、文の意味あるいは内包とされているものであるが、ここでは集合の場合と同様、事態を性質の特殊なものとする．つまり、事態 x は、 x を有するものが必ず 0 であるような性質と考える．即ち、性質 x は事態であるということを、 $\text{PROP}(x)$ と表し、次のように定義する．

D 1 $\text{PROP}(x) \equiv_{df} x \leq 1$

§ 1のD 20より、 $\text{Pw}(1)$ は事態全体の集合である．以下では、変項 p, q でこのような事態を表す．また、ここでは p が真である、あるいは事実であるということは、 $0 \in p$ ということであるとする．§ 1のD 1より明らかに、 $0 \in p \Leftrightarrow E ! p$ である．以下では明らかな場合、特に結合記号と共に用いられる場合、 $E ! p$ の代わりに単に p とも記す．例えば、 $\sim E ! p$, $\Box E ! p$, $E ! p \Rightarrow E ! q$ の代わりにそれぞれ、 $\sim p$, $\Box p$, $p \Rightarrow q$ と記す．このように規約をすれば、変項 p, q, r を式としても扱うことができる．これら

の定義に従って、直観的に事態が満たすべきと考えられる、次の二つの条件が証明される。

$$T1 \quad (p \Leftrightarrow q) \equiv (p = q)$$

$$T2 \quad \exists p (p \Leftrightarrow \Phi)$$

$0 \leq 1, 1 \leq 1$ であるから、 $0, 1$ は事態である。また次の定理が成り立つ。

$$T3 \quad p = 0 \equiv \sim \Diamond p$$

$$T4 \quad p = 1 \equiv \Box p$$

ここで p が原子的事態であるということを $ATOM(p)$ と表し、次のように定義する。

$$D2 \quad ATOM(p) \equiv_{df} \Diamond \forall q \{q \equiv (p \Rightarrow q)\}$$

MZFCにおいては、このような原子的事態が存在することが証明される。ここでは原子的事態をいわゆる可能世界であると考え、変項 i, j, k で表す。可能世界も事態であるから、可能世界全体の集合が存在する。以下ではこれを I とする。また、変項 p, q の場合と同様、 $\Diamond E! i$ を $\Diamond i, E! i \Rightarrow E! p$ を $i \Rightarrow p$, 等と記す。実在する可能世界 i , 即ち、 $E! i$ となる i を現実の世界とする。実際、 $E! i$ のときは、 i は事実を、そして事実のみを論理的に含意する、即ち、 $\forall q \{q \equiv (i \Rightarrow q)\}$ となる。また、このような現実の世界が唯一つ存在するということも証明される。

(可能)世界 i と事態 p に対して、 $i \Rightarrow p$ となると、 p は i において真であると言う。このように可能世界における真という概念を定義すれば、通常の可能世界意味論における定義や定理がすべて証明される。例えば、

$$T5 \quad (i \Rightarrow \sim p) \equiv \sim (i \Rightarrow p)$$

$$T6 \quad \{i \Rightarrow (p \wedge q)\} \equiv \{(i \Rightarrow p) \wedge (i \Rightarrow q)\}$$

$$T7 \quad \{i \Rightarrow (p \vee q)\} \equiv \{(i \Rightarrow p) \vee (i \Rightarrow q)\}$$

$$T8 \quad \{i \Rightarrow (p \supset q)\} \equiv \{(i \Rightarrow p) \supset (i \Rightarrow q)\}$$

$$T9 \quad \{i \Rightarrow (p \equiv q)\} \equiv \{(i \Rightarrow p) \equiv (i \Rightarrow q)\}$$

$$T10 \quad \{i \Rightarrow \forall x \phi(x)\} \equiv \forall x \{i \Rightarrow \phi(x)\}$$

$$T11 \quad \{i \Rightarrow \exists x \phi(x)\} \equiv \exists x \{i \Rightarrow \phi(x)\}$$

$$T12 \quad (i \Rightarrow \Box p) \equiv \forall j (j \Rightarrow p)$$

$$T13 \quad (i \Rightarrow \Diamond p) \equiv \exists j (j \Rightarrow p)$$

また、ライプニッツの主張に対応した、次のような定理も証明される。

$$T14 \quad \Box p \equiv \forall i (i \Rightarrow p)$$

$$T15 \quad \Diamond p \equiv \exists i (i \Rightarrow p)$$

さらに、以下に述べるように、すべての性質は、いわゆる付値関数に相当するものと一対一に対応する。まず、性質 u と世界 i に対して、 $x \in u$ が i において真となる x 全体の集合 $\{x : i \Rightarrow x \in u\}$ を、 u の i における外延と言う。このとき、任意の性質 u は、任意の i に対して u の i における外延を対応させる関数と一対一に対応する。つまり、関数 $V(u)$ を $D3$ のように定義すれば、 $T16$ が成り立つ。

$$D3 \quad V(u) =_{df} \lambda i \{x : i \Rightarrow x \in u\}$$

$$T16 \quad V(u) = V(v) \equiv u = v$$

さらに、定義域を可能世界全体の集合とし、各々の世界にある集合を対応させる関数 f は、ある u に対する $V(u)$ となる。即ち、

$$T17 \quad \{\text{Dom}(f) = I \wedge \forall i \text{ SET}(f i)\} \supset \exists u (V(u) = f)$$

u が集合のときは、 $V(u)$ はすべての世界に u 自身を対応させる関数となり、この逆も言える。即ち、

$$T18 \quad SET(u) \equiv \forall i (V(u, i) = u)$$

もちろん、 $V(u, i)$ は $V(u)$ が i に対応させる対象である。特に空集合 0 に対して、 $V(0)$ はすべての世界に 0 自身を対応させる関数である。また、 u が集合であるということは、 u のどの世界における外延も同一である、ということである。即ち、

$$T19 \quad SET(u) \equiv \forall i \forall j \{V(u, i) = V(u, j)\}$$

さらに、世界 i に対しては、 $V(i)$ は i に 1 を、 i 以外の世界 j に対しては 0 を対応させる関数となる。即ち、

$$T20 \quad V(i, i) = 1 \wedge \forall j \{i \neq j \supset V(i, j) = 0\}$$

§ 4 性質に関する正則公理と非正則公理

正則公理 $F A$ を性質に一般化した公理を MFA とする。即ち、

$$MFA \quad E! u \supset \exists x \{x \in u \wedge \forall y (\Diamond y \in x \supset \sim y \in u)\}$$

次のような条件を満たす性質 x を正則的 (well-founded) であると言う。

D1 (1) $\cdots \wedge \Diamond x_3 \in x_2 \wedge \Diamond x_2 \in x_1 \wedge \Diamond x_1 \in x$ となる無限の系列、 $x, x_1, x_2, \cdots$ は存在しない

§ 3 の T15 より、(1) は次の (2) と等値である。

(2) $\cdots \wedge (i_2 \Rightarrow x_3 \in x_2) \wedge (i_1 \Rightarrow x_2 \in x_1) \wedge (i \Rightarrow x_1 \in x)$ となる世界の系列、 $i, i_1, i_2, \cdots$ 及び無限の系列、 $x, x_1, x_2, \cdots$ は存在しない

もちろん、(1)、(2) における $i, i_1, i_2, \cdots$ 及び $x, x_1, x_2, \cdots$ には同一なものがあってもかまわない。従って、それらは循環する場合も含んでいる。

ここで次のような公理を $MFA1$ とする。

$MFA1$ すべての性質は正則的である

MFA と $MFA1$ は等値である。実際、 MFA を仮定する。このとき、もし D1 の (1) におけるような系列、 $x, x_1, x_2, \cdots$ が存在したならば、これらの集合を α とする。 $E! \alpha$ であるから、 MFA より $\exists x \{x \in \alpha \wedge \forall y (\Diamond y \in x \supset \sim y \in \alpha)\}$ となるが、これは明らかに (1) の系列の条件に矛盾する。従って、 $MFA1$ が成り立つ。

逆に、 $MFA1$ を仮定する。さらに、(背理法の仮定として) MFA が成り立たないとする。このとき、 $\Diamond [E! u \wedge \forall x \{x \in u \supset \exists y (\Diamond y \in x \wedge y \in u)\}]$ であり、従って § 3 の T15 より、 $i \Rightarrow [E! u \wedge \forall x \{x \in u \supset \exists y (\Diamond y \in x \wedge y \in u)\}] \cdots \textcircled{1}$ となる i, u が存在する。このような i, u に対しては、§ 3 の T6 より、 $i \Rightarrow E! u$ 。従って、§ 3 の T11 より、 $i \Rightarrow x \in u$ となる x が存在する。このような x に対しては、①、§ 3 の T10、T8 より、 $i \Rightarrow \exists y (\Diamond y \in x \wedge y \in u)$ 、従って、 $i \Rightarrow (\Diamond x_1 \in x \wedge x_1 \in u)$ となる x_1 が存在する。このような x_1 に対しては、§ 3 の T13 より、 $i_1 \Rightarrow x_1 \in x$ かつ $i \Rightarrow x_1 \in u$ 。同様に、 i, x_1 に対しては、 $i_2 \Rightarrow x_2 \in x_1$ かつ $i \Rightarrow x_2 \in u$ となる i_2, x_2 が存在する。このような過程は無限に続く。それ故、選択公理を用いれば、D1 の (2) におけるような無限の系列が存在してしまう。従って MFA が成り立つ。

ここで順序数 μ に対して、集合 $F(\mu)$ を次のように帰納的に定義する。

$$D2 (1) \quad F(\mu + 1) = Pw(F\mu)$$

(2) $F(\mu) = \bigcup \{F(\mu_1) : \mu_1 < \mu\}$ (μ が超限数のとき)

MZFCにおいては、集合論の証明と同様にして、 $\forall x \exists \mu \{x \in F(\mu)\}$ と MFA は等値であることが示される。従って、MFA, MFA1, $\forall x \exists \mu \{x \in F(\mu)\}$ はすべて等値である。

ここで、MFA から $\Diamond$ を除いた、次のような形の正則公理を MFA* とする。

MFA* $E! u \supset \exists x \{x \in u \wedge \forall y (y \in x \supset \sim y \in u)\}$

次のような条件を満たす性質 x を正則的* であると言う。

D3 (1)* $\Diamond (\dots \wedge x_3 \in x_2 \wedge x_2 \in x_1 \wedge x_1 \in x)$ となる無限の系列, $x, x_1, x_2, \dots$ は存在しない

(1)* は次の(2)* と等値である。

(2)* $\dots \wedge x_3 \in x_2 \wedge x_2 \in x_1 \wedge x_1 \in x$ が i において真となる, 世界 i 及び無限の系列, $x, x_1, x_2, \dots$ は存在しない

D3 の(2)* は, D1 の(2)において世界 $i, i_1, i_2, \dots$ がすべて同一の場合と考えることができる。ここで次のような公理を MFA1* とする。

MFA1* すべての性質は正則的* である

MFA と MFA1 の場合と同様にして, MFA1* は MFA* と等値となることが証明される。明らかに, MZFC においては MFA から MFA* を導くことができる。しかし, この逆は成り立たない (このことは後に証明される)。なお, 明らかに, MFA* 従って MFA1* から, §2 で述べた集合に関する正則公理 FA を導くことができる。

次に, 性質に関する非正則公理 MFA を述べるが, それに先だって次のように定義する。まず, 次のようなグラフ G を可能世界グラフと言う。 G は通常のグラフのように節を有するが, これらを §2 と同様, n, m で表す。ただし, G の縁は n, m とある可能世界 i から構成される組 $\langle n, i, m \rangle$ とする。以下では, $\langle n, i, m \rangle$ が縁のとき, $n \rightarrow i \rightarrow m$ と記す。また $\langle n, i, n_1 \rangle$ と $\langle n_1, j, n_2 \rangle$ が縁のとき, $n \rightarrow i \rightarrow n_1 \rightarrow j \rightarrow n_2$ と記す。さらに, 経路等のグラフに関する概念も §2 で述べたと同様に定義されるものとする。そして, 可能世界グラフは先頭の節を有するとする。

次に, 可能世界グラフ G の可能世界飾りを, §3 の D3 に基づき, 次の条件を満たす, G の節全体を定義域とする関数 d として定義する (以下明らかな場合は「可能世界」を省略する)。

D4 任意の節 n に対して, $V(dn) = \lambda i \{dm : n \rightarrow i \rightarrow m\}$

集合に関するグラフと同様, ある可能世界グラフ G の飾り d と先頭の節 n に対して $dn = x$ となるとき, x は G によって描かれる, あるいは G は x を描くと言う。

ここで任意の性質 u に対して, 可能世界グラフ G を次のように帰納的に定義する。まず, 先頭の節を u 自身とする。そして, G の節 n に対して $i \Rightarrow x \in n$ のとき, 即ち $x \in V(n, i)$ のとき, x を G の節であるとし, また $n \rightarrow i \rightarrow x$ とする。つまり, 任意の i 及び G の節 n に対して, 次のことが成り立つとする

(i) $V(n, i) = \{m : n \rightarrow i \rightarrow m\}$

このような G を u の基準的な可能世界グラフと言う。 u の基準的な可能世界グラフ G の節に対してそれ自身を対応させる関数を d とする。このとき, 任意の i 及び G の節 n に対しては (i) より, $V(dn, i) = \{dm : n \rightarrow i \rightarrow m\}$ である。従って, D4 より d

はGの飾りであり、 $du = u$ となる。それ故、任意の u に対して、 u を描く可能世界グラフGが存在することになる。

明らかに正則的な性質の基準的グラフは、無限の経路を含まない。非正則公理MAFAは、無限の経路も含むすべての可能世界グラフがある性質を一義的に描く、と考えるものである。即ち、MAFAは次のような形で与えられる。

MAFA すべての可能世界グラフは唯一つの飾りを有する

以下に述べるように、MAFAからは§2で述べたAFAを導くことができる。まず、§2で述べた（タグ t を有する）グラフGに対して、可能世界グラフ G_1 を次のように定義する。即ち、Gの節 n 、 m に対して $n \rightarrow m$ のとき、 G_1 において $\forall i (n \rightarrow i \rightarrow m)$ とする。また、Gにおいて n が子を有しないとき、 tn を描くある可能世界グラフ $G(tn)$ の先頭の節を n で置き換え、それを G_1 の部分グラフとして付け加える（ここではGと $G(tn)$ は共通の節をもたないとする）。このような G_1 に対してはMAFAより、その可能世界飾り d_1 が存在する。このような d_1 に対して、Gの節全体を定義域とする関数 d を、 $dn = d_1n$ と定義する。このとき、 d はGの飾りになる。実際、子を有するGの節 n に対しては、D4及び G_1 の定義より、任意の i, j に対して、 $V(d_1n, i) = \{d_1m : n \rightarrow i \rightarrow m\} = \{d_1m : n \rightarrow j \rightarrow m\} = V(d_1n, j)$ 。それ故、 $V(d_1n, i) = V(d_1n, j)$ 。従って、§3のT19より d_1n は集合である。それ故、§3のT18より、任意の i に対して、 $V(d_1n, i) = d_1n$ 。従ってD4より、 $d_1n = \{d_1m : n \rightarrow i \rightarrow m\} = \{dm : n \rightarrow m\}$ 。従って、 $dn = d_1n = \{dm : n \rightarrow m\}$ となる。また、子を有しないGの節 n に対しては G_1 の定義より、 $dn = d_1n = tn$ 。従って§2のD7より、 d はGの飾りになっている。

また、(d と同じタグ t を有する) Gの飾り d_2 が与えられているとする。このとき、子を有するGの節 n に対して、 d_2n は集合である。従って、§3のT18及び G_1 の定義より、任意の i に対して、 $V(d_2n, i) = d_2n = \{d_2m : n \rightarrow m\} = \{d_2m : n \rightarrow i \rightarrow m\}$ 。従って、MAFAより G_1 の飾りは d_1 のみであるから、子を有するGの節 n に対して、 $d_2n = d_1n = dn$ 。また、子を有しないGの節 n に対しては、 $d_2n = tn = dn$ 。従って、 $d_2 = d$ 。従って d はGの唯一の飾りである。それ故、AFAが成り立つ。従って、MAFAはAFAを性質に一般化したものとみなすことができる。

可能世界グラフGの飾り d と節 n に対しては、 $V(dn) = \lambda i \{x : i \Rightarrow x \in dn\}$ だからD4より、任意の i 及びGの節 n に対して、 $\{dm : n \rightarrow i \rightarrow m\} = \{x : i \Rightarrow x \in dn\}$ 。従って、

$$(ii) \quad n \rightarrow i \rightarrow m \equiv (i \Rightarrow dm \in dn)$$

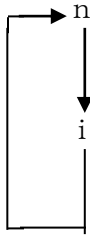
MAFAを仮定すれば、次頁のグラフIにおいては $n \rightarrow i \rightarrow n$ だから、(ii)より $i \Rightarrow dn \in dn$ となる飾り d が存在する（以下ではグラフを図に描くとき、先頭の節を一番上に記す）。従って、 $i \Rightarrow x \in x$ となる x が存在する。それ故、MAFAを仮定すれば、D3の(2)*は成り立たず、従ってMFA1*及びMFA*も成り立たない。それ故、もちろんMFAも成り立たない。

世界 i に対して $n \rightarrow i \rightarrow n_1 \rightarrow i \rightarrow \dots$ となる無限の経路が存在しないような可能世界グラフを、 i に関して正則的であると言う。ここで、次のようなMAFAより弱い形の公理をMAFA*とする。

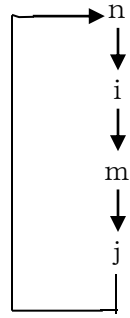
$MAFA^*$ どの世界に関しても正則的であるすべての可能世界グラフは、唯一つの飾りを有する

以下のグラフⅡは、 $i \neq j$ のとき、どの世界に関しても正則的である．従って、 $MAFA^*$ によれば、グラフⅡに対する飾り d が存在する．このとき (ii) より、 $\dots \wedge (i \Rightarrow d m \in d n) \wedge (j \Rightarrow d n \in d m) \wedge (i \Rightarrow d m \in d n)$ となるから、先の $MFA1$ は成り立たない．従って MFA も成り立たない．それ故、 $MAFA^*$ と MFA は両立不可能である．一方、明らかに、 $MAFA^*$ と $MFA1^*$ (従って MFA^*) は両立可能である ($MZFC$ にこれらの公理を付け加えた体系の無矛盾性は後に証明される)．

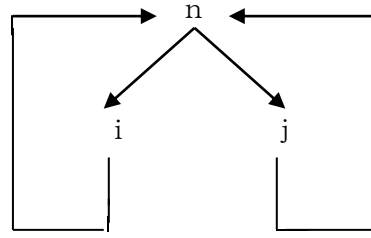
グラフⅠ



グラフⅡ



グラフⅢ

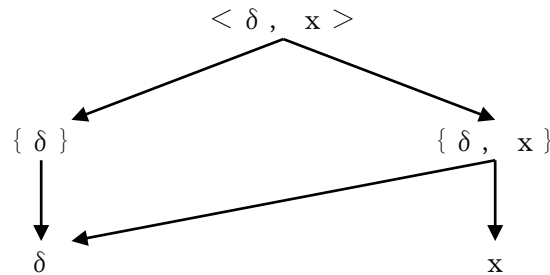


§ 5 MZFC+MAFAのモデル

この節では、 $ZFCA+AF A$ において、 $MZFC+MAFA$ の可能世界モデル M を構成する．従って、 $MZFC$ (の言語) で述べられた § 4 以前の節及び後の § 6 とは異なり、以下の理論はすべて $ZFCA$ で述べられる． $ZFCA$ の記号は § 2 のそれらと同じものを用いる．ただし、変項 x, y, z はアトムと集合を、 α, β, γ は集合を表すとする．このとき、 $ZFCA$ の公理は、(構文論的には) § 2 のそれらと同じである．グラフに関する用語も § 2 で定義されたそれらを用いる． $AF A$ も § 2 における (アトムを認めた) それであるとする．以下では、アトムの集合を W とする．後にも述べるように、 W は先に述べた $MZFC$ の可能世界の集合 I に対応している．このような W は、少なくとも二つの元を含むものとする．以下では W の元を変項 δ, ζ で表す．

以上を前提として、上に述べたようなモデルを構成する．まず、任意の δ とアトムではない対象 x に対して $\langle \delta, x \rangle$ の基準的なグラフ (ただし x は子を有しないとする) を $(\delta, x$ に関する) 順序対グラフと言う．つまり、順序対グラフは次のようなものである．

グラフⅣ



以下では特に x のみを末端の節と言う．上の順序対グラフの定義は，単独のグラフとしてのそれである．順序対グラフは，当然他のグラフの部分になりうる．(いくつかの) 順序対グラフを部分とする一般のグラフ G において，順序対グラフの縁以外の縁を構成する節を正規の節と言う．一般に節はいくつかの縁を構成しうるから，節は正規であるとともに順序対グラフの節でもありうる．しかし，以下で問題とされるグラフでは，正規の節と順序対グラフの節はすべて異なっていると仮定する．また，新たにグラフが定義される時も，そのような条件を満たすように構成されるものとする．以下では n ， m は正規の節を表すとする．また，以下で問題とされる，あるいは新たに定義されるグラフ G においては，任意の G の節 n と δ に対して一義的に定まるある対象 x が， G の含む順序対グラフの末端の節として与えられているとする．そして， G が含む， δ ， x に関する順序対グラフを $G < \delta, n >$ と表す．もちろん， x は末端の節として上記のような条件を満たすものであり，従って x と n は異なったものである．

あるグラフ G において， n が $G < \delta, n >$ の先頭の節の親となる時，(G において) n は $G < \delta, n >$ に先行していると言い， $n \Rightarrow G < \delta, n >$ と記す．また， $G < \delta, n >$ の末端の節が m の親である時， $G < \delta, n >$ は m に先行すると言い， $G < \delta, n > \Rightarrow m$ と記す．

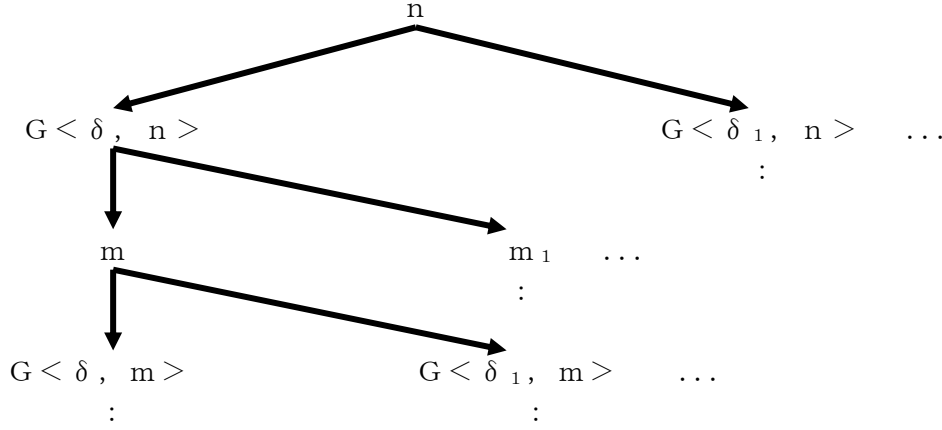
$n \Rightarrow G < \delta, n >$ 及び $G < \delta, n > \Rightarrow m$ のとき， n は $G < \delta, n >$ を介して m の祖先であると言い， $n \Rightarrow G < \delta, n > \Rightarrow m$ と記す．また，節の集合 α に対して， $m \in \alpha$ となるすべての m (そしてそのような m のみ) に対して $n \Rightarrow G < \delta, n > \Rightarrow m$ のとき， n は $G < \delta, n >$ を介して α 全体の祖先であると言う．なお，このとき，もし $\alpha = 0$ であれば， $n \Rightarrow G < \delta, n >$ であるが， $G < \delta, n >$ の末端の節は子を有しないとする．

さらに， n が $G < \delta, n >$ を介してグラフ G_1 の先頭の節の祖先である時， n は $G < \delta, n >$ を介して G_1 に先行していると言う．節の集合の場合と同様，グラフの集合 α に対しても， $G_1 \in \alpha$ となるすべての G_1 (そしてそのような G_1 のみ) に対して， n が $G < \delta, n >$ を介して G_1 に先行しているならば， n は $G < \delta, n >$ を介して α 全体に先行していると言う．なお，節の集合の場合と同様， $\alpha = 0$ のときは， $n \Rightarrow G < \delta, n >$ であるが， $G < \delta, n >$ の末端の節は子を有しないとする．

次のような，タグ t を有するグラフ G を可能世界モデルグラフと言う (これも § 4 で述べた可能世界グラフに対応しているが，もちろんそれとは異なったものである．以下明らかな場合は，これをモデルグラフあるいは単にグラフと言う)．まず， G において，任意の節 n は，すべての δ に対する $G < \delta, n >$ (そしてそのようなもののみ) に先行している．また， n に親がある場合，その親はある順序対グラフの末端の節である．さらに， G の部分である任意の順序対グラフは，ある δ と G の節 n に対する $G < \delta, n >$ であり， $n \Rightarrow G < \delta, n >$ である．そして， $G < \delta, n >$ の末端の節は，子を有しないかあるいは正規の節のみを子としている．

モデルグラフは，先行関係を表す $\Rightarrow$ を用いれば，次のようなグラフ V として表される．もちろん， $G < \delta, n >$ 等は (上記の規約に従って選ばれた末端の節 x 等を有する) グラフ IV と同じものである．

グラフ V



定義より，モデルグラフにおいて子を有さない節は，アトムか順序対グラフの末端の節である．ここでモデルグラフは次のようなタグ t を有するとする．即ち， t は任意の δ に対して δ 自身を，また順序対グラフの末端の節に対しては 0 を対応させる関数である．従って，モデルグラフ G とその節 n に対して， G の飾りを d とすれば， G が含む $G < \delta, n >$ は， $G < \delta, n >$ の末端の節を x とすれば，順序対 $< \delta, d x >$ を描いている．また， $d n$ は任意の δ に対して，このような $d x$ を対応させる関数である．

通常の可能世界モデルでは，性質は可能世界全体を定義域とする関数として解釈される．上で定義したモデルグラフによって描かれる対象も，アトムを可能世界と解釈すれば，このような関数である．そこで，ここではモデルグラフによって描かれる対象全体を，モデル M の個体領域とする．以下では，このような M の個体を変項 a, b, c で表す．上に述べたように， M の個体 a は $\text{Dom}(a) = W$ となる関数である．また，明らかに任意の世界 δ に対して， $x \in a(\delta)$ となる x もすべてモデルグラフによって描かれ，従って M の個体である．さらに， M の個体 a に対しては，§ 2 の最後で述べた a の基準的グラフ $G^c(a)$ もモデルグラフとなる．以下では， M の個体をその個体自身の名前として用いる．従って， a, b, c はそれら自身の名前である．

次に， $MZF C$ の式 Φ に対して， Φ が δ において真であるということを， $\delta \vdash \Phi$ と表し，次のように帰納的に定義する(以下では明らかな場合， $\delta \vdash 'b \in a'$ 等において引用符を省略して， $\delta \vdash b \in a$ 等と記す)．

- D1 (1) $\delta \vdash b \in a \equiv_{df} b \in a(\delta)$
 (2) $\delta \vdash a = b \equiv_{df} a = b$
 (3) $\delta \vdash \sim \Phi \equiv_{df} \sim (\delta \vdash \Phi)$
 (4) $\delta \vdash \Phi \wedge \Psi \equiv_{df} (\delta \vdash \Phi) \wedge (\delta \vdash \Psi)$
 (5) $\delta \vdash \Phi \vee \Psi \equiv_{df} (\delta \vdash \Phi) \vee (\delta \vdash \Psi)$
 (6) $\delta \vdash \Phi \supset \Psi \equiv_{df} (\delta \vdash \Phi) \supset (\delta \vdash \Psi)$
 (7) $\delta \vdash \Phi \equiv \Psi \equiv_{df} (\delta \vdash \Phi) \equiv (\delta \vdash \Psi)$
 (8) $\delta \vdash \forall x \Phi(x) \equiv_{df} \forall a \{ \delta \vdash \Phi(a) \}$
 (9) $\delta \vdash \exists x \Phi(x) \equiv_{df} \exists a \{ \delta \vdash \Phi(a) \}$

$$(10) \quad \delta \vdash \Box \Phi \equiv_{df} \forall \zeta (\zeta \vdash \Phi)$$

$$(11) \quad \delta \vdash \Diamond \Phi \equiv_{df} \exists \zeta (\zeta \vdash \Phi)$$

すべての δ に対して $\delta \vdash \Phi$ となるとき、 Φ は M において恒真と言い、 $\vdash \Phi$ と表す。以下では、 $MZFCA + MAF A$ の公理が M において恒真であることを示す。ただし、先にも述べたように、 $A3$ 、 $A4$ は他の公理から証明されるから、これらは除くことにする。 $A2$ も同様に他の公理から証明されるが、後の定理のために証明を与えることにする。

T 1 $\vdash A1$

証明 任意の δ 、 a 、 b に対して、 $\delta \vdash \Box (a \equiv b) \cdots \textcircled{1}$ とする。このとき D 1 の (10) より、 $\forall \zeta (\zeta \vdash a \equiv b)$ 、従って、§ 1 の D 7、D 1 の (8) より、 $\forall \zeta \forall c (\zeta \vdash c \in a \equiv c \in b)$ 。それ故、D 1 の (7) より、 $\forall \zeta \forall c \{(\zeta \vdash c \in a) \equiv (\zeta \vdash c \in b)\}$ 。従って D 1 の (1) より、 $\forall \zeta \forall c \{c \in a (\zeta) \equiv c \in b (\zeta)\}$ 。それ故、先にも述べたように $x \in a (\zeta)$ となる x はすべて M の個体であるから、 $\forall \zeta \{a (\zeta) = b (\zeta)\}$ 。従って $a = b$ となる。従って、D 1 の (2) より、 $\delta \vdash a = b \cdots \textcircled{2}$ 。以上より、 $\textcircled{1}$ ならば $\textcircled{2}$ となる。それ故、D 1 の (6) より、 $\delta \vdash \Box (a \equiv b) \supset a = b$ 。これは任意の δ 、 a 、 b に対して成り立つから、 $\vdash \forall u \forall v \{\Box (u \equiv v) \supset u = v\}$ 。それ故、 $\vdash \Box \forall u \forall v \{\Box (u \equiv v) \supset u = v\}$ 、即ち、T 1 が成り立つ。

T 2 $\vdash A2$

証明 任意の a 、 δ に対して、 $\delta \vdash \Diamond b \in a \wedge \Phi (b) \cdots \textcircled{1}$ となる b に対しては、 $\delta \vdash \Diamond b \in a$ だから、D 1 の (11) より、 $\exists \zeta (\zeta \vdash b \in a)$ 。従って、 $\exists \zeta \{b \in a (\zeta)\}$ 。それ故、 $b \in \bigcup \{a (\zeta) : \zeta \in W\}$ である。従って、 $\textcircled{1}$ となる b 全体の集合が存在する。ここで、モデルグラフ G を次のように定義する。まず、ある n を先頭の節とする。また、先にも述べたように、 b の基準的グラフを $G^c (b)$ とする。そして、 G において、すべての世界 δ に対して、 n は順序対グラフ $G < \delta$ 、 $n >$ を介して $\{G^c (b) : \delta \vdash \Diamond b \in a \wedge \Phi (b)\}$ 全体に先行しているとする (n と $G < \delta$ 、 $n >$ の節は $\{G^c (b) : \delta \vdash \Diamond b \in a \wedge \Phi (b)\}$ に属するグラフには含まれないとする。以下、同様な場合も同じように規約する)。このような G によって描かれる M の個体を c とする。このような c は、任意の δ に対して、 $\textcircled{1}$ となる b 全体の集合を対応させる関数である。それ故、任意の δ に対して、 $\forall b \{\delta \vdash b \in c \equiv \Diamond b \in a \wedge \Phi (b)\}$ 。従って、 $\forall b \{\vdash b \in c \Leftrightarrow \Diamond b \in a \wedge \Phi (b)\}$ 。従って、 $\vdash \forall x [x \in c \Leftrightarrow \{\Diamond x \in a \wedge \Phi (x)\}]$ 。それ故、D 1 の (9) より、 $\vdash \exists v \forall x [x \in v \Leftrightarrow \{\Diamond x \in a \wedge \Phi (x)\}]$ 。それ故、定理が成り立つ。

T 3 $\vdash A5$

証明 任意の a 、 δ に対して、 $\delta \vdash \exists w (b \in w \wedge w \in a) \cdots \textcircled{1}$ となる b に対しては、 $\exists c \{\delta \vdash (b \in c \wedge c \in a)\}$ 。従って、D 1 の (4) より、 $\exists c \{b \in c (\delta) \wedge c \in a (\delta)\}$ 。それ故、 $b \in \bigcup \{c (\delta) : c \in a (\delta)\}$ 。従って、 $\textcircled{1}$ となる b 全体の集合 α が存在する。それ故、T 2 の証明と同様にして定理が成り立つ。

T 4 $\vdash A6$

証明 任意の a 、 δ に対して、 $\delta \vdash b \leq a \cdots \textcircled{1}$ となる b に対しては、 $\forall \zeta (\zeta \vdash b \leq a)$ 。従って、 $\forall \zeta \{b (\zeta) \leq a (\zeta)\}$ 。それ故、 $\forall \zeta \{b (\zeta) \in Pw (a (\zeta))\}$ 。従って、 $\bigcup \{Pw (a (\zeta)) : \zeta \in W\} = \beta$ とすれば、 $\forall \zeta (b (\zeta) \in \beta)$ 。従って、 $\gamma = \{< \zeta, c > : \zeta \in W \wedge c \in \beta\}$ とすれば、 $b \leq \gamma$ 。それ故、 $b \in Pw (\gamma)$ となる。従って、 $\textcircled{1}$ と

なる b 全体の集合が存在する．それ故，T 2 の証明と同様にして定理が成り立つ．

T 5 $\vdash A 7$

証明 任意の δ と (MZFC の) 式 Φ に対して， $\delta \vdash \forall x \forall y \forall z [\{\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z)\} \Rightarrow y = z]$ とする．このとき， $\vdash \forall x \forall y \forall z [\{\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z)\} \supset y = z]$ …①となる．また任意の ζ に対して，‘ $\zeta \vdash \Phi(c, b)$ ’ という (ZFCA の) 式を $\Psi(\zeta, c, b)$ とする．このとき①から， $\forall c \forall b \forall b_1 [\{\Psi(\zeta, c, b) \wedge \Psi(\zeta, c, b_1)\} \supset b = b_1]$ ．従って，任意の a に対して， $\{c : \zeta \vdash \Diamond c \in a\} = \alpha$ とすると，ZFCA の置換公理より， $\{b : \exists c (c \in \alpha \wedge \Psi(\zeta, c, b))\}$ という集合が存在する．それ故， α ， $\Psi(\zeta, c, b)$ の定義より， $\{b : \exists c (\zeta \vdash \Diamond c \in a \wedge \zeta \vdash \Phi(c, b))\}$ という集合が存在する．即ち， $\zeta \vdash \exists x \{\Diamond x \in a \wedge \Phi(x, b)\}$ となる b 全体の集合が存在する．それ故，T 2 と同様にして定理が成り立つ．

次に A 8 が恒真であることを証明するが，それに先だって次のように定義する．まず，以下では，§ 1 の D 10～D 20 等で定義された MZFC のすべての項 σ に対して，それが表す M の個体を σ^M とする．例えば，‘ 0 ’ が表す M の個体を 0^M とする．つまり， $\vdash a = [x : x \neq x]$ となる a ，即ち， $\vdash \forall x \{x \in a \Leftrightarrow x \neq x\}$ となる a を 0^M とする．また， M の個体 a に対しては $a^M = a$ とする．このとき，D 1 の(1)，(2)は，次のように拡張される．

(1)* $\delta \vdash \sigma \in \tau \equiv_{df} \sigma^M \in \tau^M (\delta)$

(2)* $\delta \vdash \sigma = \tau \equiv_{df} \sigma^M = \tau^M$

定義より明らかに，次のレンマが成り立つ．

L 1 $a = 0^M \equiv \forall \delta (a(\delta) = 0)$

また，§ 3 の T 19 に対応した次のレンマが成り立つ．

L 2 $\vdash \text{‘SET}(a)\text{’} \equiv \forall \delta \forall \zeta \{a(\delta) = a(\zeta)\}$

証明 任意の a に対して， $\vdash \text{‘SET}(a)\text{’}$ と仮定する．先にも述べたように，このことは， $\vdash \forall x (x \in a \Leftrightarrow \Box x \in a)$ ，即ち， $\vdash \forall x (x \in a \equiv \Box x \in a)$ …①と等値である．ここで，(背理法の仮定として) $\forall \delta \forall \zeta \{a(\delta) = a(\zeta)\}$ …②が成り立たないとする．このとき， $a(\delta) \neq a(\zeta)$ となる δ ， ζ が存在する．従って， $b \in a(\delta) \wedge \sim b \in a(\zeta)$ …③であるか，逆に $b \in a(\zeta) \wedge \sim b \in a(\delta)$ …④となる b が存在する．ここでは③を仮定する (④を仮定しても， δ と ζ を交換すれば，以下同様である)．このような b ， δ に対しては①より， $\delta \vdash (b \in a \equiv \Box b \in a)$ ．従って，③の $b \in a(\delta)$ より， $\delta \vdash \Box b \in a$ ．それ故， $\vdash b \in a$ ．従って，③の ζ に対しても， $\zeta \vdash b \in a$ ．しかし，これは③の $\sim b \in a(\zeta)$ に矛盾する．従って②が成り立つ．

逆に②を仮定する．ここで任意の δ ， b に対して， $\delta \vdash b \in a$ とする．このとき， $b \in a(\delta)$ だから②より， $\forall \zeta \{b \in a(\zeta)\}$ ．従って， $\forall \zeta (\zeta \vdash b \in a)$ ．従って， $\delta \vdash \Box b \in a$ ．以上より，任意の δ ， b に対して， $\delta \vdash \text{‘}b \in a\text{’}$ ならば $\delta \vdash \text{‘}\Box b \in a\text{’}$ ．また，明らかにこの逆も成り立つ．それ故， $\forall \delta \forall b (\delta \vdash \text{‘}b \in a\text{’} \equiv \delta \vdash \text{‘}\Box b \in a\text{’})$ ．従って，①が成り立つ．以上より，① $\equiv$ ②，従ってレンマが成り立つ．

なお，L 2 における ‘ $\vdash$ ’ は，もちろん (任意の δ に対して) ‘ $\delta \vdash$ ’ と置き換えることができる (以下の L 3 等に関しても同様である)． σ^M と同様，MZFC の変項，例えば集合を表す ‘ α ’ に対して，(ZFCA の) 変項 α^M は一般に $\vdash \text{SET}(a)$ となる a を表すとする．従って L 2 より，任意の α^M に対して $\forall \delta \forall \zeta \{\alpha^M(\delta) = \alpha^M(\zeta)\}$ である．

ここで α を M の個体のみから構成される集合とする．つまり，§ 2で定義した α の基準的なグラフと同様に構成されるが，節が M の個体のときは子を有しないように構成されたグラフを $G(\alpha)$ とする．そして， $G(\alpha)$ の子を有しない任意の節は， M の個体であるか，そうでなければ 0 であるとする．このような α に対して， $G(\alpha)$ の構成に対応した帰納法によって，次のような条件を満たすモデルグラフ $G \ll \alpha \gg$ を構成できる．

D 2 (1) α は $G \ll \alpha \gg$ の先頭の節である

(2) $G \ll \alpha \gg$ の正規の節は $G(\alpha)$ の節と同じである

(3) $G(\alpha)$ の節 n が M の個体でないとき， $G \ll \alpha \gg$ において，すべての δ に対して， n は $G < \delta$ ， $n >$ を介して（節の集合としての） $\dot{n}$ 全体の祖先となる．

(4) $G(\alpha)$ の節 n が M の個体のとき， $G \ll \alpha \gg$ は n の基準的グラフ $G^c(n)$ を部分として含む

以下ではこのような $G \ll \alpha \gg$ を， α に対応したモデルグラフと言う． $G \ll \alpha \gg$ に対しては，公理A F Aより唯一の飾り d が存在する． $G \ll \alpha \gg$ はモデルグラフであるから，その節 n に対して， $d n$ は M の個体である．また， M の個体でない節 n に対しては，D 2の(3)，L 2より次のレンマが成り立つ．

L 3 $\vdash \text{SET}(d n)$

D 2の(3)より，上のような n と $G \ll \alpha \gg$ の任意の節 m に対しては，

L 4 $m \in n \equiv \vdash 'd m \in d n'$

D 2の(4)より， n が M の個体のときは，

L 5 $d n = n$

明らかに， 0 は M の個体から構成されるが， M の個体ではない．従って， 0 が $G \ll \alpha \gg$ の正規の節のときは，D 2の(3)より，

L 6 $d(0) = 0^M$

また， $G \ll \alpha \gg$ の任意の節 n ， m に対して， $\{n, m\}$ ， $\{n\}$ ， $\langle n, m \rangle$ が $G \ll \alpha \gg$ の正規の節であるが， M の個体ではないときは，D 2の(3)より，

L 7 $d(\{n, m\}) = \{d n, d m\}^M$

L 8 $d(\{n\}) = \{d n\}^M$

L 9 $d(\langle n, m \rangle) = \langle d n, d m \rangle^M$

さらに， n ， m が M の個体ではないとする．このとき， $n \cup m$ が $G \ll \alpha \gg$ の正規の節であるが， M の個体ではないときは，同様に，

L 10 $d(n \cup m) = (d n \cup d m)^M$

L 8，L 10より， n ， $\{n\}$ ， $n \cup \{n\}$ が $G \ll \alpha \gg$ の正規の節であるが， M の個体ではないときは，

L 11 $d(n \cup \{n\}) = (d n \cup \{d n\})^M$

なお，逐一述べないが，以下で構成される $G \ll \alpha \gg$ の α は，すべて M の個体から構成されるが， M の個体ではない．また，L 11等のレンマが用いられるときは，その項に関する条件が満たされる．

T 6 $\vdash A 8$

証明 Z F C Aの公理A 8より， $0 \in \alpha \wedge \forall \beta (\beta \in \alpha \supset \beta \cup \{\beta\} \in \alpha) \cdots \textcircled{1}$ となる α が存在する．このような α は自然数全体の集合であると考えてよい．従って， α 及び α

の元は、 M の個体から構成されるが、 M の個体ではない。そこで、 α に対応したモデルグラフ $G \ll \alpha \gg$ の飾りを d とする。このような d に対しては、 $0 \in \alpha$ だから、 $L4$ より、 $\vdash 'd0 \in d\alpha'$ 。従って $L6$ より、 $\vdash '0 \in d\alpha' \dots ②$ 。ここで、任意の β^M に対して、 $\vdash \beta^M \in d\alpha \dots ③$ とする。このとき、 $D2$ の(3)より、 $d\beta = \beta^M$ で $\beta \in \alpha$ となる β が存在する。このような β に対しては①より、 $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$ 。従って、 $L4$ 、 $L11$ より、 $\vdash d\beta \cup \{d\beta\} \in d\alpha$ 。それ故、 $d\beta = \beta^M$ より、 $\vdash \beta^M \cup \{\beta^M\} \in d\alpha \dots ④$ 。以上より、任意の β^M に対して、③ならば④。それ故、 $\vdash \forall \beta (\beta \in d\alpha \supset \beta \cup \{\beta\} \in d\alpha)$ 。それ故、②より $\vdash 0 \in d\alpha \wedge \forall \beta (\beta \in d\alpha \supset \beta \cup \{\beta\} \in d\alpha)$ 。従って、定理が成り立つ。

T7 $\vdash A9$

証明 仮定よりアトムは二つ以上存在する。そこで、次のようにモデルグラフ G を構成する。まず、ある集合 n を先頭の節とする。そして、ある世界 δ と、ある a の基準的グラフ $G^c(a)$ に対して、 n は $G < \delta, n >$ を介して $\{G^c(a)\}$ 全体に先行している、即ち、 $G^c(a)$ にそしてそのみに先行しているとする。また、 δ 以外の世界 ζ に対して、 n は $G < \zeta, n >$ を介して 0 全体に先行している、即ち、 $n \twoheadrightarrow G < \zeta, n >$ であるが、 $G < \zeta, n >$ の末端の節は子をもっていないとする。このような G が描く b に対しては明らかに、 $b(\delta) = \{a\}$ であるが、 δ 以外の世界 ζ に対しては $b(\zeta) = 0$ となる。従って、 $b(\delta) \neq b(\zeta)$ 。従って、 $L2$ より $\vdash \sim \text{SET}(b)$ であり、定理が成り立つ。

T8 $\vdash A10$

証明 任意の a, δ に対して、 $a(\delta)$ に対応したグラフ $G \ll a(\delta) \gg$ の描く M の個体を b とする。このような b に対しては $L3$ より、 $\vdash \text{SET}(b) \dots ①$ 。また、 $L4$ 、 $L5$ より、任意の c に対して、 $c \in a(\delta) \equiv \vdash 'c \in b'$ 。それ故、①、 $L2$ より、 $\forall c (\delta \vdash 'c \in a' \equiv \delta \vdash 'c \in b')$ 。それ故、 $\delta \vdash \forall x (x \in a \equiv x \in b)$ 。即ち、 $\delta \vdash a \doteq b$ である。それ故、①より、 $\delta \vdash \exists \alpha (a \doteq \alpha)$ 。これは任意の a と δ に対して成り立つから、 $\vdash \forall x \exists \alpha (x \doteq \alpha)$ 。即ち、定理が成り立つ。

MZFCの選択公理Cに対して次の定理が証明される。

T9 $\vdash C$

証明 任意の α^M に対して、 $\{\{a : \vdash a \in \beta^M\} : \vdash \beta^M \in \alpha^M\} = \gamma \dots ①$ とすると、ZFC Aの選択公理より、 $\forall \beta \{(\beta \in \gamma \wedge \beta \neq 0) \supset f(\beta) \in \beta\} \dots ②$ となる関数 f が存在する。このような f に対して、 $f_1 = \{<\beta^M, b> : <\{a : \vdash a \in \beta^M\}, b> \in f\} \dots ③$ と関数 f_1 を定義する。さらに、このような f_1 に対応したグラフ $G \ll f_1 \gg$ が描く M の個体を c とする。このような c に対しては、 $L4$ 、 $L5$ 、 $L9$ より、任意の β^M と b に対して、 $<\beta^M, b> \in f_1 \equiv \vdash <\beta^M, b> \in c \dots ④$ 。また、 $L3$ 等より、 $\vdash \text{FUNC}(c) \dots ⑤$ となる。

ここで、任意の β^M に対して、 $\vdash '\beta^M \in \alpha^M \wedge \beta^M \neq 0' \dots ⑥$ とする。このとき、①より、 $\{a : \vdash a \in \beta^M\} \in \gamma$ 及び $\{a : \vdash a \in \beta^M\} \neq 0$ 。従って②より、 $f(\{a : \vdash a \in \beta^M\}) \in \{a : \vdash a \in \beta^M\}$ 、即ち、 $<\{a : \vdash a \in \beta^M\}, b> \in f$ かつ $b \in \{a : \vdash a \in \beta^M\}$ となる b が存在する。このような b に対しては、③、④より、 $\vdash <\beta^M, b> \in c$ かつ $\vdash b \in \beta^M$ となる。従って、 $\vdash \exists x (<\beta^M, x> \in c \wedge x \in \beta^M)$ 、即ち、 $\vdash c(\beta^M) \in \beta^M \dots ⑦$ となる。以上より、任意の β^M に対して、⑥ならば⑦。従って、 $\vdash \forall \beta \{(\beta \in \alpha^M \wedge \beta \neq 0) \supset c(\beta) \in \beta\}$ 。従って、⑤より、任意の α^M に対して、 $\vdash \exists f \forall \beta \{(\beta$

$\in \alpha^M \wedge \beta \neq 0) \supset f(\beta) \in \beta \}$. それ故、定理が成り立つ.

最後にMAFAが恒真となることを証明するが、それに先だって以下のように定義する.
まず、次のレンマが成り立つ.

L 12 $\vdash \text{ATOM}(a) \equiv \exists ! \delta \{a(\delta) = \{0^M\} \wedge \forall \zeta (\delta \neq \zeta \supset a(\zeta) = 0)\}$

証明 $\vdash \text{ATOM}(a) \dots \textcircled{1}$ とする. このとき § 3 の D 2 等より, $\vdash \text{PROP}(a) \dots \textcircled{2}$ 及び $\vdash \Diamond \forall q \{q \equiv (E! a \Rightarrow q)\}$ となる. 従って, $\delta \vdash \forall q \{q \equiv (E! a \Rightarrow q)\} \dots \textcircled{3}$ となる δ が存在する. このような δ に対しては, $\delta \vdash \{E! a \equiv (E! a \Rightarrow E! a)\}$. 従って $\vdash (E! a \Rightarrow E! a)$ より, $\delta \vdash E! a$ となる. 従って $\textcircled{2}$ より, $a(\delta) = \{0^M\} \dots \textcircled{4}$.

ここで, $\textcircled{4}$ の δ に対してモデルグラフ $G(\delta)$ を次のように構成する. まず, ある集合 n を先頭の節とする. そして, n は $G < \delta, n >$ を介して $\{G^C(0^M)\}$ 全体に先行しているとする. また, δ 以外の可能世界 ζ に対しては, n は $G < \zeta, n >$ を介して 0 全体に先行しているとする. 明らかに, $G(\delta)$ が描く b に対しては, $\vdash \text{PROP}(b)$, $\delta \vdash E! b$, $\forall \zeta (\delta \neq \zeta \supset \sim \zeta \vdash E! b) \dots \textcircled{5}$ となる. $\vdash \text{PROP}(b)$, $\delta \vdash E! b$ 及び $\textcircled{3}$ より, $\delta \vdash E! a \Rightarrow E! b$, 従って, $\vdash E! a \supset E! b \dots \textcircled{6}$ となる. ここで (背理法の仮定として) $\delta \neq \zeta \wedge a(\zeta) \neq 0$ となる ζ が存在するとする. このような ζ に対しては, $\zeta \vdash E! a$ であるから, $\textcircled{6}$ より, $\zeta \vdash E! b$. しかし, これは $\textcircled{5}$ に矛盾する. それ故, $\forall \zeta (\delta \neq \zeta \supset a(\zeta) = 0) \dots \textcircled{7}$ となる. さらに, $\textcircled{4}$ と $\textcircled{7}$ が成り立つような δ は, 明らかに唯一つである.

逆に, $\textcircled{4}$, $\textcircled{7}$ を仮定すれば明らかに, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ が成り立ち, 従って $\textcircled{1}$ が成り立つ. それ故レンマが成り立つ.

L 12 より, $\vdash \text{ATOM}(a)$ となる a と, $a(\delta) = \{0^M\} \wedge \forall \zeta (\delta \neq \zeta \supset a(\zeta) = 0)$ となる δ は一対一に対応している. 先にも述べたように, ここでは $\vdash \text{ATOM}(a)$ となる a を変項 i^M で表すが, このような i^M と上のように対応している δ を δi^M と表す. つまり, $\delta \vdash '0^M \in i^M'$ となる唯一の δ を δi^M とする. このとき, 明らかに,

L 13 $\vdash 'i^M \Rightarrow b \in a' \equiv \delta i^M \vdash b \in a$

ここで $\text{MZFC} + \text{MAFA}$ の可能世界グラフ $G^M (= < N^M, E^M >^M)$ に対して, モデルグラフ G を次のように定義する. まず, G の正規の節は G^M のそれと同じ, 即ち, $\vdash a \in N^M$ となる a とする. 以下では, このような節を n, m で表す. また, G の含む順序対グラフの末端の節は, それに関する規約を満たすように適当に選ばれるものとする. G においては, 任意の n, i^M に対して, n は $G < \delta i^M, n >$ を介して $\{m : \vdash n \rightarrow i^M \rightarrow m\}$ 全体の祖先であるとする. 即ち, 任意の i^M, n, m に対して, $n \Rightarrow G < \delta i^M, n > \Rightarrow m \equiv \vdash 'n \rightarrow i^M \rightarrow m'$ となるとする. このような G に対しては唯一の飾り d が存在する. このような d に関しては, 任意の i^M, n, m に対して次の (i) が成り立つ. また L 13 等より, (i) ~ (iv) が順次等値となる.

(i) $d(n, \delta i^M) = \{dm : n \Rightarrow G < \delta i^M, n > \Rightarrow m\}$

(ii) $dm \in d(n, \delta i^M) \equiv n \Rightarrow G < \delta i^M, n > \Rightarrow m$

(iii) $\delta i^M \vdash 'dm \in d n' \equiv n \Rightarrow G < \delta i^M, n > \Rightarrow m$

(iv) $\vdash 'i^M \Rightarrow dm \in d n' \equiv n \Rightarrow G < \delta i^M, n > \Rightarrow m$

そこで, このような d (の定義域を正規の節に限定したもの) に対して, d に対応した

グラフ $G \ll d \gg$ の描く M の個体を d^M とする．このような d^M に対しては $L4$ 等より，任意の n, a に対して， $\langle n, a \rangle \in d \equiv \vdash \langle n, a \rangle \in d^M$ だから，次の (v) が成り立つ．

$$(v) \quad \vdash 'i^M \Rightarrow d^M m \in d^M n' \equiv \vdash 'n \rightarrow i^M \rightarrow m'$$

そして，(v) は次の (vi), (vii) と等値である．

$$(vi) \quad \vdash 'd^M m \in V(d^M n, i^M)' \equiv \vdash 'n \rightarrow i^M \rightarrow m'$$

$$(vii) \quad \vdash 'd^M m \in V(d^M n, i^M) \equiv n \rightarrow i^M \rightarrow m'$$

従って，次のような d^M が存在することになる．

$$(viii) \quad \vdash 'Dom(d^M) = N^M' \text{ であり，そしてすべての } n \text{ に対して，} \\ \vdash 'V(d^M n) = \lambda i^M \{d^M m : n \rightarrow i^M \rightarrow m\}'$$

明らかに，上のような d と d^M は，一対一に対応している．また， G の飾りは d のみである．それ故，(viii) となる d^M は唯一つ存在する．従って，

$$T10 \quad \vdash MAFA$$

以上より， $MZFC + MAFA$ の公理はすべて恒真である．従って， $MZFC + MAFA$ は， $ZFCA + AFA$ が無矛盾であれば，やはり無矛盾である．

ここで，世界 δ に対して $n \Rightarrow G < \delta, n > \Rightarrow n_1 \Rightarrow G_1 < \delta, n_1 > \Rightarrow \dots$ という部分を含まないモデルグラフを， δ に関して正則的であると言う．どの δ に対しても正則的であるモデルグラフによって描かれる対象全体を個体領域とするモデルを M^* とする．上に述べた証明から明らかなように， M^* において $MZFC$ の公理はすべて恒真となる．また，§4 で述べた $MAFA^*$ や MFA^*1 (従って MFA^*) も恒真である．従って， $MZFC + MAFA^* + MFA^*$ は無矛盾である．さらに， M^* においては MFA は恒真ではないから， $MZFC$ において MFA は MFA^* から導かれない．

上ではメタ言語の体系として $ZFCA + AFA$ を考えたが，その代わりに $ZFC + AFA$ をとってもよい．実際， W の元をアトムではなく，ある集合として扱えば，同様なモデルが構成できる．それ故，上で $ZFCA$ に関して述べたことは，代わりに ZFC をとっても同様に言われる．例えば， $MZFC + MAFA$ は， $ZFC + AFA$ が無矛盾であれば，やはり無矛盾である．

§6 性質に関する非正則公理の応用

この節では非正則公理 $MAFA$ の哲学等に対する応用について述べる．従って以下の理論は， $MZFC + MAFA$ におけるそれである．

§4 のグラフ I とその飾り d に対しては，§4 の $D4$ より， $V(dn, i) = \{dn\}$ 及び $\forall k (i \neq k \supset V(dn, k) = 0)$ ，即ち， $\{k : V(dn, k) = \{dn\}\} = \{i\}$ 及び $\{k : V(x, k) = 0\} = I - \{i\}$ である．このような $d(n)$ を $\Omega\{i\}$ と表す．また，§4 のグラフ III によって描かれる x ，即ち， $\{k : V(x, k) = \{x\}\} = \{i, j\}$ 及び $\{k : V(x, k) = 0\} = I - \{i, j\}$ となる x を $\Omega\{i, j\}$ とする．そして，一般に可能世界の集合 α に対して，次のような可能世界グラフを G とする．即ち， G の先頭の節を n とするとき， α の任意の元 i に対して (そしてそのような i に対してのみ) $n \rightarrow i \rightarrow n$ であり， G はそれら以外の縁を有していないとする．このような G が描く対象を $\Omega\alpha$ とする．このとき，明らかに次の定理が成り立つ (以下の $\Omega\alpha$, $\Omega\beta$ における

α, β は可能世界の集合とする).

$$T1 \quad \Omega \alpha = x \equiv \{i : V(x, i) = \{x\}\} = \alpha \wedge \\ \{i : V(x, i) = 0\} = I - \alpha$$

$$T2 \quad \Omega 0 = 0$$

$$T3 \quad \Omega \alpha = \Omega \beta \equiv \alpha = \beta$$

$$T4 \quad \{i : i \Rightarrow E! \Omega \alpha\} = \alpha$$

$$T5 \quad x \in \Omega \alpha \supset x = \Omega \alpha$$

$$T6 \quad E! \Omega \alpha \equiv \Omega \alpha \in \Omega \alpha$$

$$T7 \quad \Omega \alpha \in \Omega \beta \equiv \{\Omega \alpha = \Omega \beta \wedge E! \Omega \alpha\}$$

可能世界全体の集合 I に対する ΩI は, $ZFC + AFA$ で扱われる Ω , 即ち $\Omega = \{\Omega\}$ となる Ω と同じものとなる. 実際, $T1$ より, $\{i : V(x, \Omega I) = \{\Omega I\}\} = I$ だから, $\forall i (V(\Omega I, i) = \{\Omega I\})$. 従って, $\forall i \forall j \{V(\Omega I, i) = V(\Omega I, j)\}$ だから, §3 の $T19$ より, ΩI は集合である. それ故, §3 の $T18$ より, 任意の i に対して $\Omega I = V(\Omega I, i) = \{\Omega I\}$ であるから, $\Omega I = \{\Omega I\}$ となる.

哲学ではいわゆる個体が問題とされる. もちろん, これに関しては種々の説があるが, ここでは次のように考える.⁽³⁾ 個体というのは, ある種の事態, つまり可能世界の集合に対応していると考えられる. 実際, 個体はそれが実在する世界全体の集合に一对一に対応していると考えられる. それ故, 上の $T3, T4$ より, $\Omega \alpha$ を個体として扱うことができるだろう. もちろん, すべての事態の集合 α に対して $\Omega \alpha$ が個体とは言えないであろうが, ここでは個体に対応した α が与えられているとして, $\Omega \alpha$ を個体とみなすことにする.

個体に対しては個体概念が考えられている. これに関しても種々の説があるが, ここでは次のように考える. 即ち, 個体概念はすべての世界に唯一つの対象を対応させる関数に対応したものであると考える (ここでは対応させる対象がない世界も認めることにする). つまり, 個体概念はいわゆる固定指示子によって表されるものであるとする. それ故, u が個体 $\Omega \alpha$ の個体概念であるということを $IC(u, \Omega \alpha)$ とすれば, これは次のように定義される.

$$D2 \quad IC(u, \Omega \alpha) \equiv_{df} \forall x (x \in u \Rightarrow x = \Omega \alpha)$$

このように定義した場合, $T5$ より個体はそれ自身の個体概念となる. 日常言語においても, 固有名は個体と個体概念の両方を表しているとも考えられる. 例えば「ソクラテスはソクラテスである」と言われるが, これはソクラテスを $\Omega \alpha$ とすれば, $\Omega \alpha \in \Omega \alpha$ と解釈できる. このとき $T6$ より, $\Omega \alpha$ が実在するということは, $\Omega \alpha \in \Omega \alpha$ と等値である. さらに $T7$ より, $\Omega \alpha$ が実在するときは, $\Omega \alpha \in \Omega \alpha$ と $\Omega \alpha = \Omega \alpha$ は等値となる. これは ‘ $\in$ ’ を日本語の ‘は’ や英語の ‘be’ 動詞と同じように用いることができるということを表している. これらの事実は, $MZF + MAFA$ をメタ言語として, 日常言語の意味論をそれにより即した形で構成する可能性を示している.

$E! \Omega \alpha \Leftrightarrow \Omega \alpha \in u$ となる個体概念 u を, $\Omega \alpha$ の必要十分な個体概念と言う. $T6$ より, $\Omega \alpha$ は自分自身の必要十分な個体概念である. 一般に $IC(u, \Omega \alpha)$ となる u は $\Omega \alpha$ だけとは限らない. しかし, u を必要十分なものに限定すれば, 明らかに $\Omega \alpha$ は自分自身の唯一の個体概念である. また, $\Omega \alpha$ が必要十分な個体概念であるということから, 任意の v に対して $(E! \Omega \alpha \Rightarrow \Omega \alpha \in v) \equiv \Omega \alpha \leq v$ が成り立つ. 例えば, $\Omega \alpha$ をソクラテス, v

を哲学者という性質とすれば、ソクラテスが実在すれば必ず彼が哲学者であると言えるとき、ソクラテスは哲学者という性質を本質としているということになる。

Ω_α の個体概念 u は、実在が可能であり、また、それが実在する場合、 $u \subseteq v$ ならば $u \leq v$ となると、完全個体概念であると言う。即ち、 u は Ω_α の完全個体概念であるということを、 $CIC(u, \Omega_\alpha)$ とすれば、このことは次のように定義される。

$$D3 \quad CIC(u, \Omega_\alpha) \equiv_{df} IC(u, \Omega_\alpha) \wedge \Diamond E! \Omega_\alpha \wedge \\ \forall v \{E! u \Rightarrow (u \subseteq v \supset u \leq v)\}$$

このとき、 $\Omega\{i\}$ は自分自身の完全個体概念になる。即ち、 $CIC(\Omega\{i\}, \Omega\{i\})$ である。さらに、必要十分な個体概念のみを考えれば、 $\Omega\{i\}$ は自分自身の完全個体概念である唯一の対象である。 $\Omega\{i\}$ は個体としての世界全体と考えることができる。それ故、 i が現実の世界のとき、 $\Omega\{i\}$ はスピノザの神に対応していると考えられる。

哲学以外にも、MZFC+MAFA はインターネット等で用いられる *hyper text* の記述にも用いることができると思われる。これには必ずしも可能世界を媒介せずに内包的な内容を直接記述できるという利点がある。

注

(1) AFA 及びそれに関する用語は次の文献に基づく。ただし、訳語は著者による。

P. Aczel, *Non-Well-Founded Sets*, CSLI Lecture Notes, Vol.14, CSLI Publications, Stanford, California, 1988

(2) MZFC に関しては次を参照されたい。

永井成男, 和田和行著, 『哲学的論理学』, 北樹出版, 1997 年, 第 II 部, 第 3 章「事態, 完全個体概念, 可能世界」

(3) このような個体の理論に関しては次を参照されたい。

和田和行, 「個体の概念について」, 論理哲学研究第 1 号, 日本論理哲学会, 1999 年

(早稲田大学非常勤講師)